Mouvement d’une particule chargée dans un champ électrique et/ou magnétique uniforme et permanent

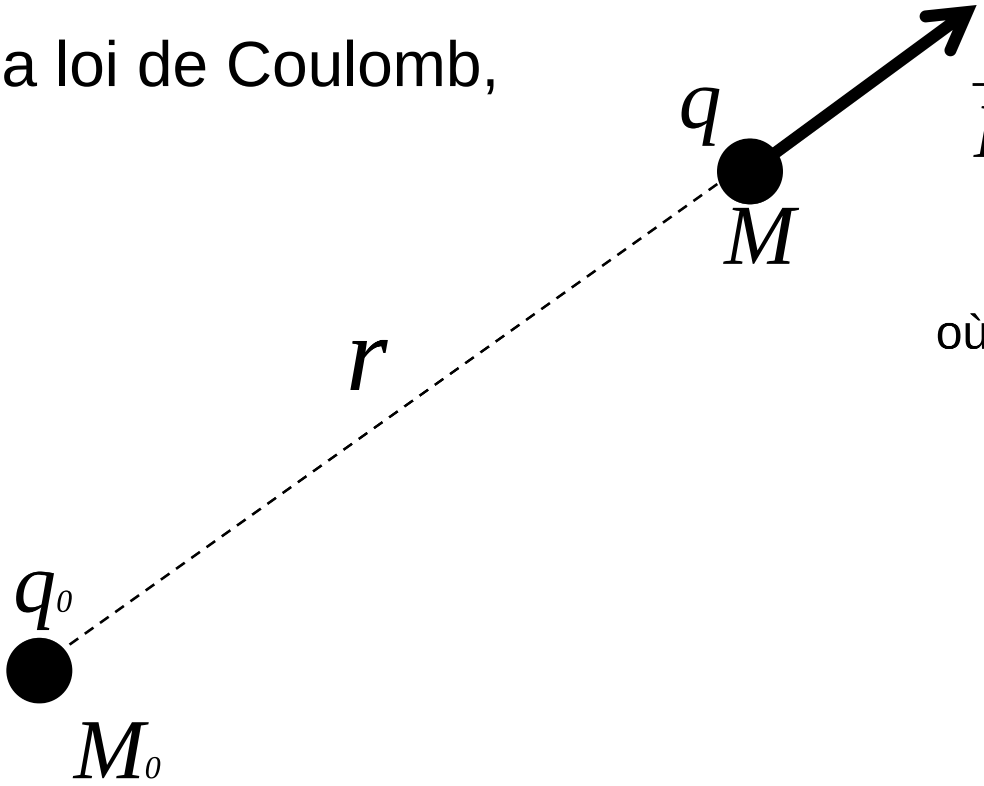
Plan

- Création d'un champ électrique
- Création d'un champ magnétique
- Force de Lorentz
- Energie d'une particule
- Mvt dans $\vec{E}$
- Mvt dans $\vec{B}$
- Mvt dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés
- Cas relativiste
  - Mvt dans $\vec{E}$
  - Mvt dans $\vec{B}$

Champ électrique

Créé par une charge ponctuelle

A partir de la loi de Coulomb,



$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r = \overrightarrow{M_0 M}/r$

on définit le champ électrique créé par q_0 en M

$$\vec{F} = q\vec{E}_0(M) \Rightarrow \boxed{\vec{E}_0(M) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r}$$

Champ électrique

Créé par une distribution de charges

- Charges ponctuelles :

$\overrightarrow{E_i}(M)$ = champ créé en M par une charge q_i $(i=1$ à $N)$ placée en M_i

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{E}_i(M)}$$

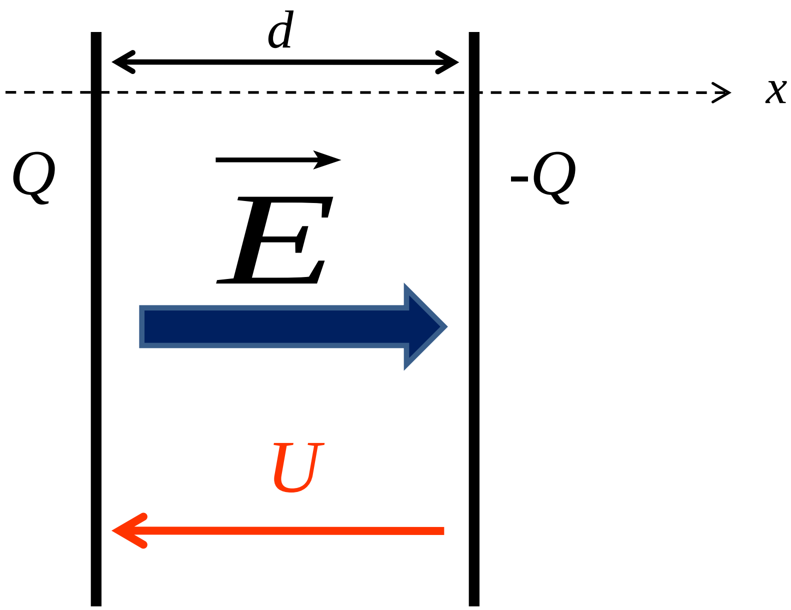
- Distribution continue :

chaque volume élémentaire δV porte la charge δq qui crée en M le champ $d\overrightarrow{E}(M)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{E}(M) = \iiint_V d\overrightarrow{E}(M)}$$

Champ électrique uniforme et permanent

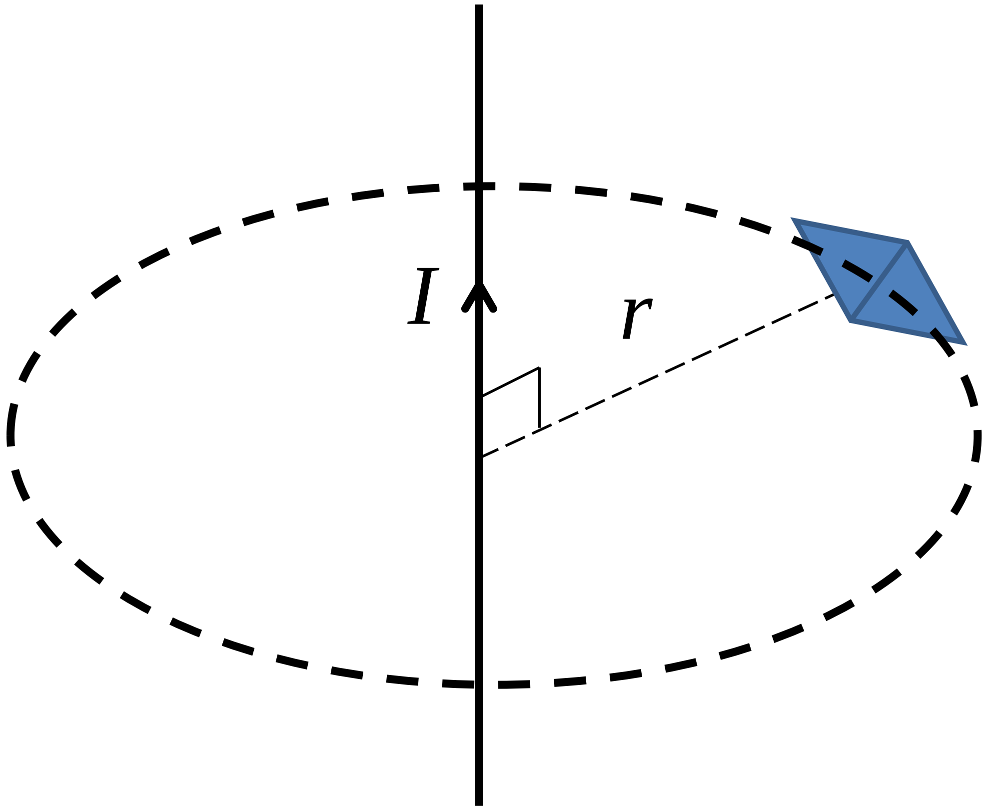
Créé par un condensateur plan



$$\vec{E} = \frac{U}{d}\vec{u}_x$$

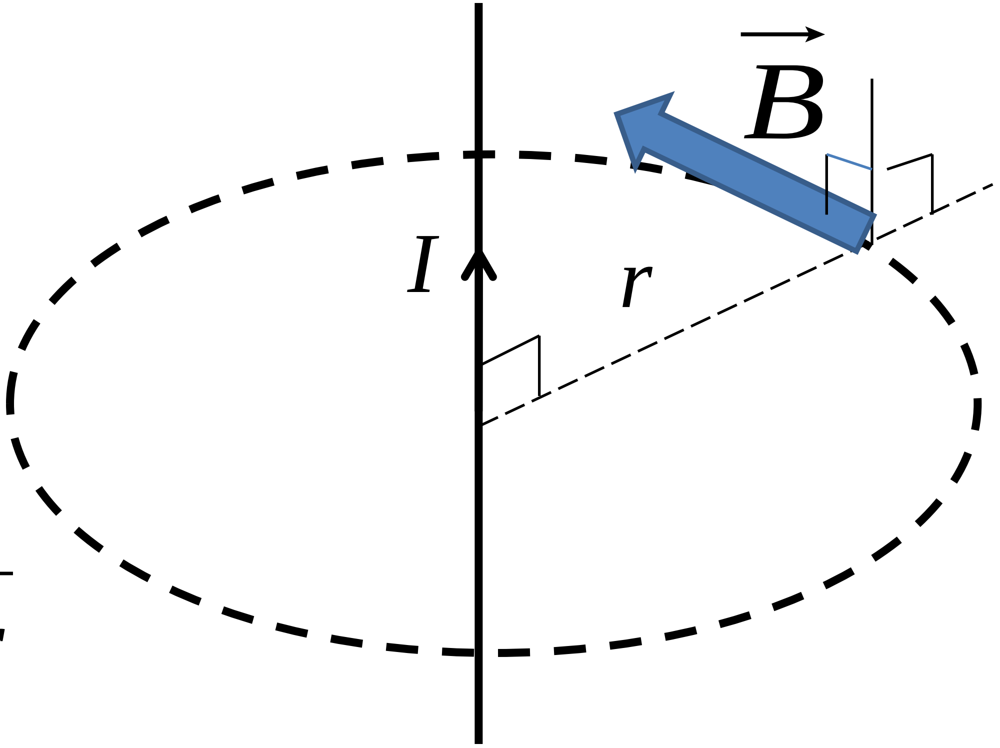
Champ magnétique
Expérience d'Oersted

Orientation de l'aiguille aimantée selon un cercle centré sur le fil



Champ magnétique
Expérience d'Oersted

Orientation de l'aiguille aimantée parallèlement au champ magnétique créé par le fil

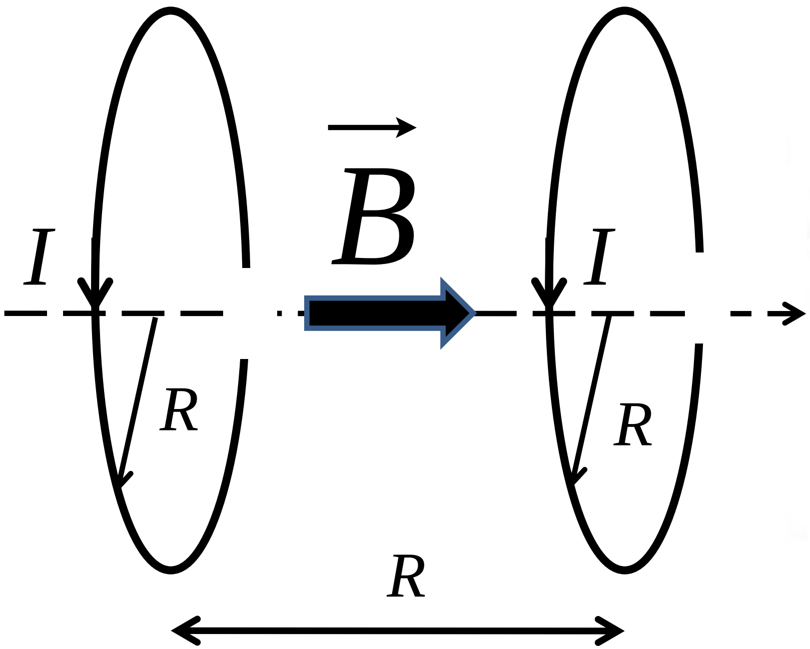


$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

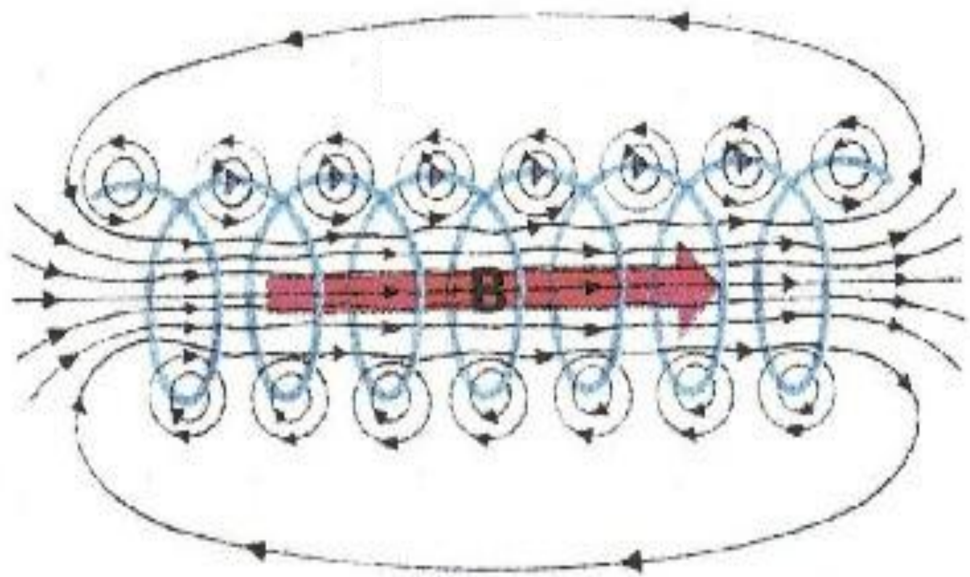
Champ magnétique

Champ magnétique uniforme et permanent

Bobines d'Helmholtz

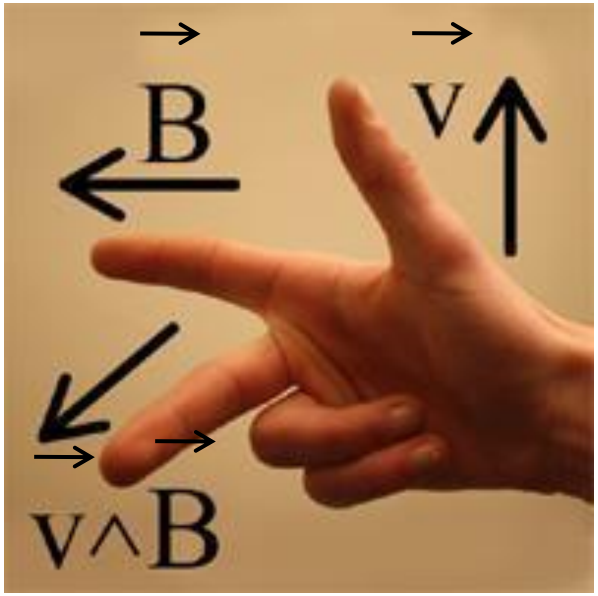


Solénoïde « infini »



Force de Lorentz

- Particule de charge q et de masse m
- Vitesse $\vec{v}$ par rapport à R référentiel galiléen
- Présence d'un champ électrique $\vec{E}$ et d'un champ magnétique $\vec{B}$



La particule est soumise à la force

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})}$$

appelée force de Lorentz

Force de Lorentz

- Elle traduit une des interactions fondamentales de la physique.
- Pas de limite à sa validité dans le cadre de nos connaissances actuelles.

➡ Valable en mécanique classique et relativiste

- La partie liée à la présence du champ magnétique est perpendiculaire au champ $\vec{B}$ et à la vitesse $\vec{\mathrm{v}}$.
- L'analyse dimensionnelle comparée des deux termes montre que E/B est homogène à une vitesse.

Force de Lorentz

Formule de transformation des champs

- La force de Lorentz et la charge q sont indépendantes du choix du référentiel galiléen.
- Soit R' un référentiel galiléen en translation à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à R .
- Composition newtonienne des vitesses : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

donc $$\begin{cases} \vec{F} = q\left(\vec{E} + (\vec{v}' + \vec{u}) \wedge \vec{B}\right) & \text{dans } R \\ \vec{F} = q\left(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'\right) & \text{dans } R' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}' = \vec{E} + \vec{u} \wedge \vec{B}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}' = \vec{B}}$$

Force de Lorentz

Equation du mouvement

- On néglige les effets du poids de la particule par rapport à ceux de la force de Lorentz

- Deuxième loi de Newton en mécanique classique :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

➢ Seule q/m , appelée charge spécifique, est expérimentalement accessible à la mesure

Energie mécanique d'une particule

- Pour $\vec{E}$ permanent , $\vec{F}_E = q\vec{E}$ dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = qV + cte$$

où V est le potentiel électrostatique

- $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ne travaille pas
- L'énergie mécanique de la particule

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}mv^2 + qV}$$

est une constante du mouvement

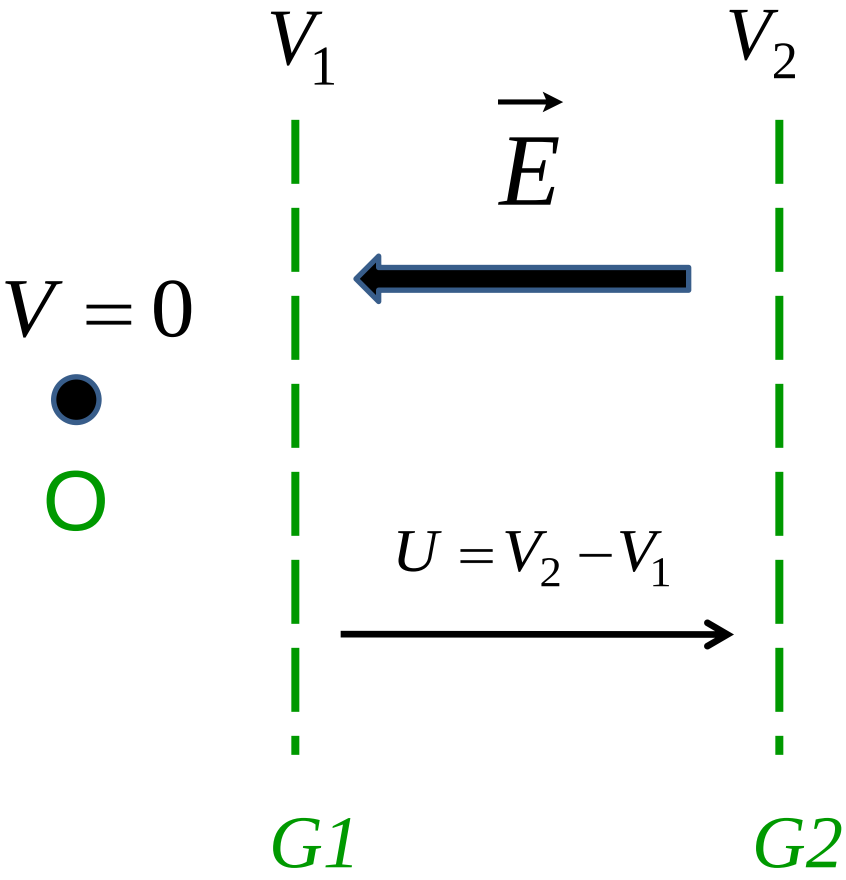
Energie mécanique d'une particule
Application : optique électronique

- Emission d'électrons $(-e, m)$ en O à
  - vitesse nulle $v = 0$ et
  - potentiel électrique nul : $V = 0$
- Grilles G_1 et G_2 transparentes aux électrons et portées aux potentiels électriques V_1 et V_2 avec
$$0 < V_1 < V_2$$
- Absence de champ magnétique

➢ Mouvement des électrons entre l'émission et la première grille et entre les deux grilles ?

Energie mécanique d'une particule

Application : optique électronique



- $E_p = 0$ en O
- $E_p = -eV_1 < 0$ sur G_1

⇨ force de O vers G_1

- $U > 0$

donc $\vec{E}$ de G_2 vers G_1

⇨ force de G_1 vers G_2

Energie mécanique d'une particule
Application : optique électronique

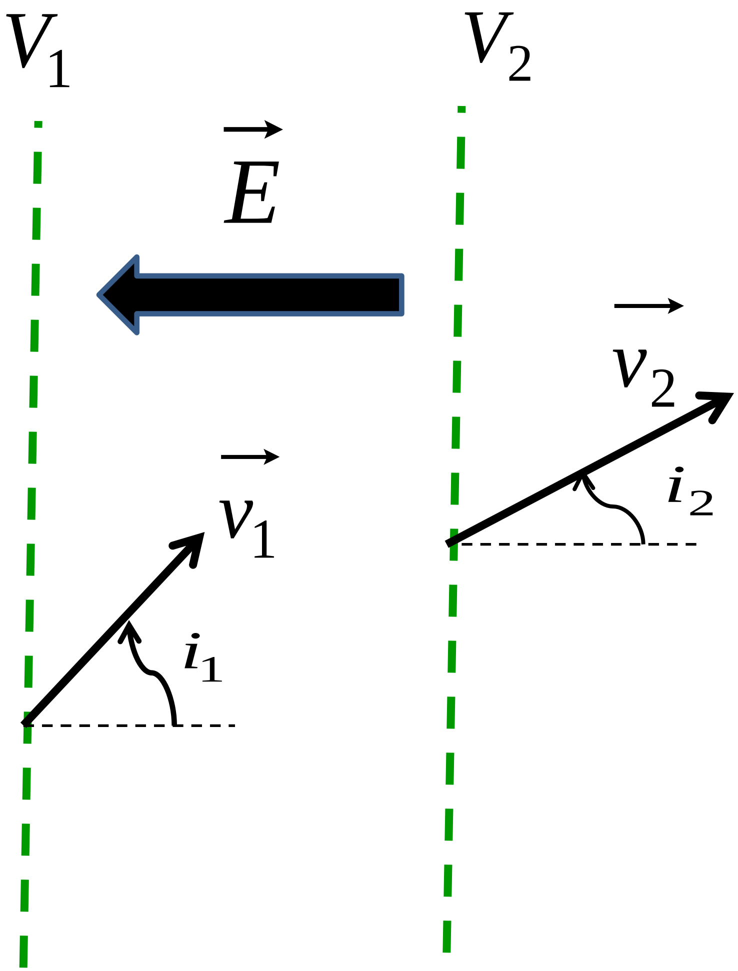
Conservation de E_m :

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - eV_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - eV_2 = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{2eV_1}{m}} \\ v_2 &= \sqrt{\frac{2eV_2}{m}} \end{aligned}} \right.$$

Energie mécanique d'une particule

Application : optique électronique



- Projection de

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

perpendiculairement à $\vec{E}$

- $v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2$

$\Rightarrow$ $\boxed{\sqrt{V_1}\sin i_1 = \sqrt{V_2}\sin i_2}$

Mouvement d'une particule dans un champ électrique uniforme et permanent

- Particule (q, m) soumise à l'action de $\vec{E}$ uniforme et permanent

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

- Point matériel $M(m)$ soumis à l'action d'un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme et permanent

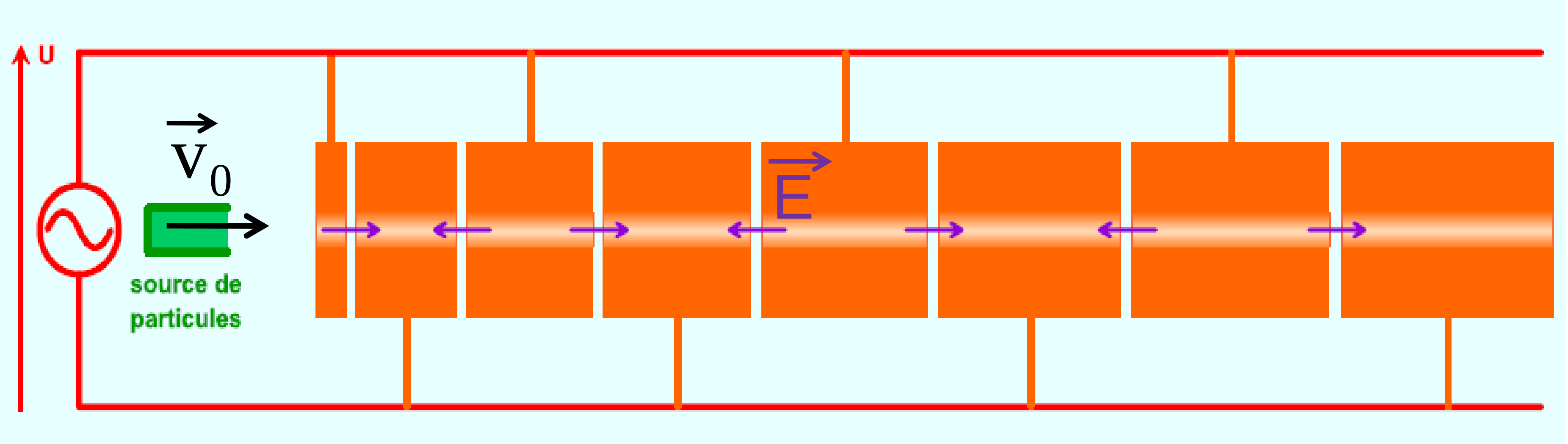
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g}$$

⇨ Trajectoire parabolique dans les deux cas

Mouvement dans un champ électrique
Application 1 : accélérateur linéaire

Accélérateur linéaire de Stanford

- 3,2 km de long-60 GeV pour les électrons et positrons
- 3 prix Nobel :
  - 1976 : Découverte du quark charm
  - 1990 : Structure en quarks du proton et du neutron
  - 1995 : Découverte du lepton tau



Série de tubes conducteurs séparés par de faibles interstices

- *Entre deux tubes voisins* est appliquée une tension alternative

  ⇨ champ électrique alternatif

- *A l'intérieur d'un tube :*

  le champ est nul et les particules conservent une vitesse constante

- *Dans l'espace entre les tubes :*

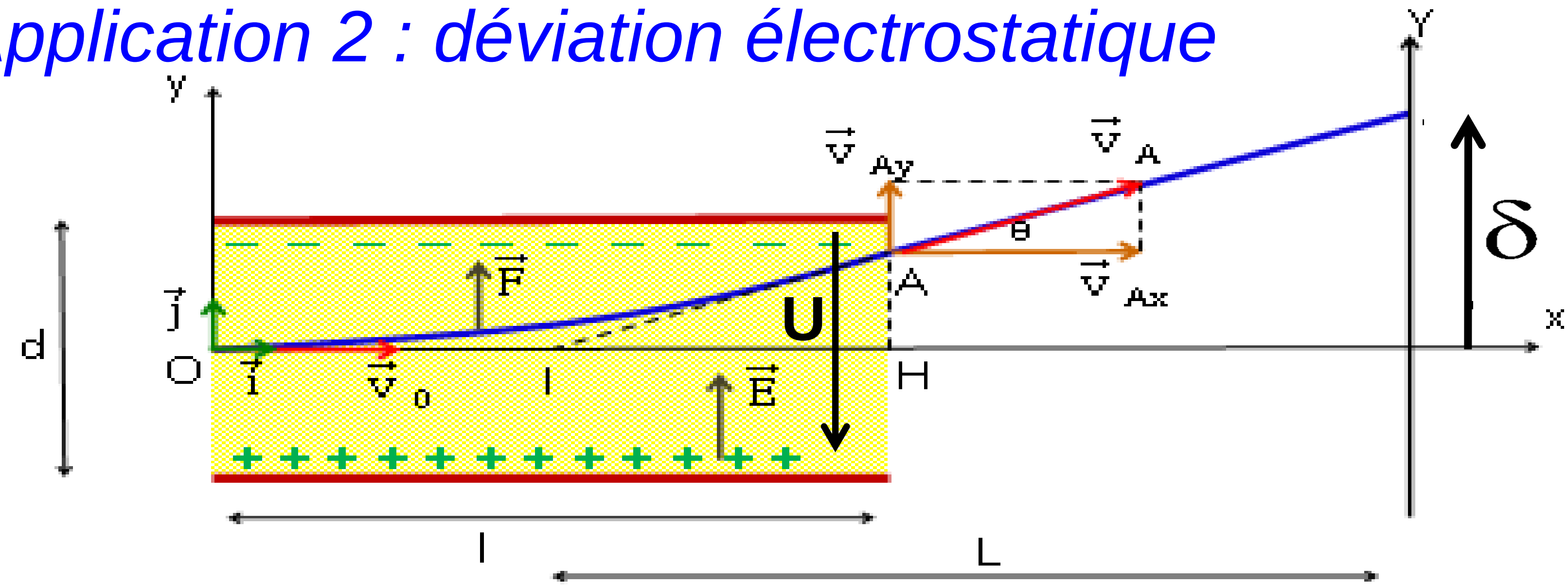
  le champ accélère les particules, à condition qu'elles soient convenablement synchronisées :

$$\Delta E_c = q(U_n - U_{n+1})$$

- *Les tubes sont de plus en plus longs :* le temps de parcours dans chaque tube doit être identique et égal à une demi-période

Mouvement dans un champ électrique

Application 2 : déviation électrostatique



- Déviation de la particule (q, m) par le champ électrique $\vec{E} = (U/d)\vec{e_y}$

- Passage en $O(x=0, y=0)$ à $t=0$ avec la vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{e_x}$

Mouvement dans un champ électrique
Application 2 : déviation électrostatique

- Deuxième loi Newton projetée

selon Ox : $dv_x/dt = 0 \Rightarrow v_x = v_0 \Rightarrow x = v_0 t$

selon Oy : $dv_y/dt = qU/md \Rightarrow v_y = qUt/md$

- En sortie du condensateur : $x_A = v_0 t_A = l$

donc $v_{Ax} = v_0$ et $v_{Ay} = qUt_A/md = qUl/mdv_0$

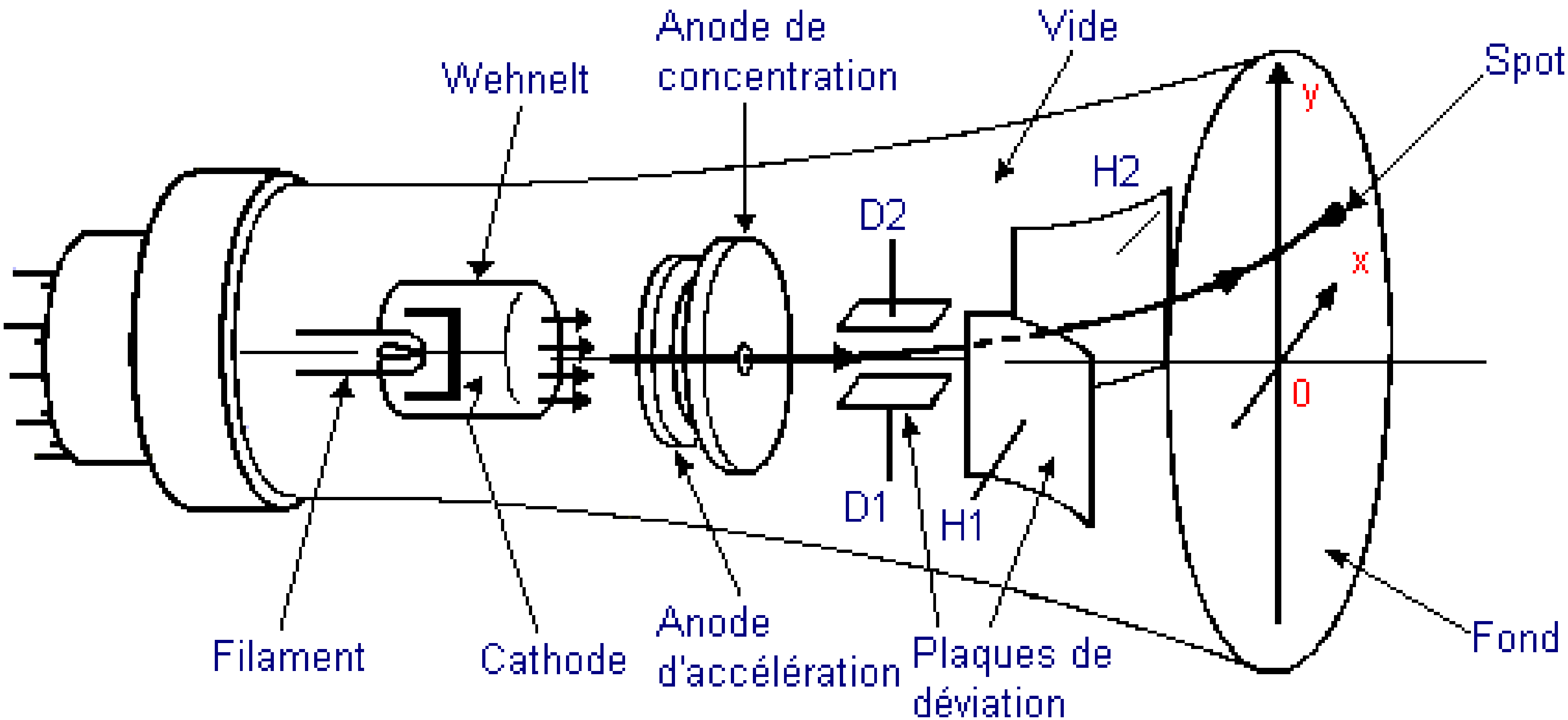
⇨ Déviation de la trajectoire de la particule :

$$\boxed{\tan\theta = v_{ay}/v_{Ax} = qUl/mdv_0^2}$$

$$\boxed{\text{Si } L \gg l, \quad \delta = L\tan\theta = qULl/mdv_0^2}$$

Mouvement dans un champ électrique
Application 2 : déviation électrostatique

Utilisation dans un tube cathodique



Mouvement dans un champ électrique

Application 3 : Conduction dans un métal par les électrons libres

- Vecteur densité de courant : $\vec{j} = \rho_e \vec{v}_e = -n_e e \vec{v}_e$

  où n_e = densité volumique d'électron libre

  $\vec{v}_e$ = vitesse d'ensemble (moyenne) des électrons

- Deuxième loi de Newton pour un électron

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{et}{m}\vec{E}}$$

Mouvement dans un champ électrique

Application 3 : Conduction dans un métal

- Métal =réseau cristallographique idéal + défauts
- Déplacement des électrons + chocs sur les constituants du réseau et les défauts

$$\vec{v}_e = <\vec{v}> = <\vec{v}_0> - (e\tau/m)\vec{E}$$

$<\vec{v}_0>$: vitesse moyenne d'un électron après un choc

$\vec{v}_0$ de direction aléatoire $\Rightarrow$ $<\vec{v}_0> = \vec{0}$

τ : temps moyen entre deux chocs successifs

$\Rightarrow$ Loi d'Ohm locale : $\boxed{\vec{j}_e = (n_e e^2 \tau/m)\vec{E} = \gamma \vec{E}}$

Mouvement dans un champ électrique

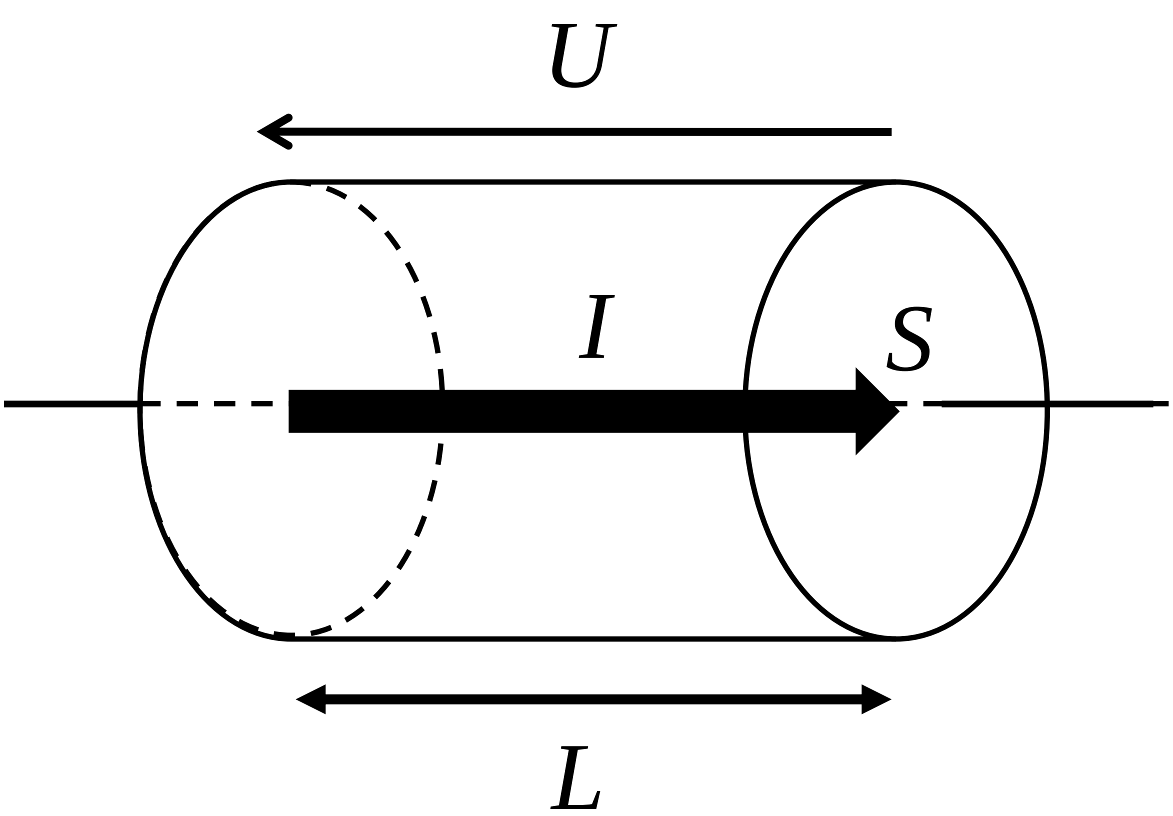
Application 3 : Conduction dans un métal

- Conductivité du métal : $\gamma = n_e e^2 \tau / m$

- $$\begin{cases} I = j_e S \\ E = U/L \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $U = \dfrac{L}{\gamma S} I$

Résistance du conducteur



Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- La force de Lorentz se réduit à sa partie magnétique :

$$\overrightarrow{F_B} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

- $\overrightarrow{F_B}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ et $\vec{B}$:

$$P_B = \overrightarrow{F_B} \bullet \vec{v} = 0$$

⇨ Aucune puissance n'est fournie à la particule

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

$$\vec{v}\cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(q\vec{v}\wedge\vec{B}\right)\cdot\vec{v} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = 0$$

- L'énergie cinétique $E_c = mv^2/2$ de la particule est une constante du mouvement
- Le module v de la vitesse est une constante du mouvement

Produit vectoriel

- Cas général

$$\vec{v}\begin{bmatrix}\dot{x}\\\dot{y}\\\dot{z}\end{bmatrix} \wedge \vec{B}\begin{bmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{y}B_z-\dot{z}B_y\\\dot{z}B_x-\dot{x}B_z\\\dot{x}B_y-\dot{y}B_x\end{bmatrix}$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Expérience : particule (q, m) soumise à l'action d'un champ $\vec{B}$ uniforme et permanent avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ perpendiculaire à $\vec{B}$

- Choix d'un repère adapté :
  - O position initiale de la particule
  - Ox dans le sens et la direction de $\vec{v_0} = v_0 \, \vec{e_x}$
  - Oz dans le sens et la direction de $\vec{B} = B \, \vec{e_z}$
  - Oy tel que $(Oxyz)$ orthogonal direct

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Deuxième loi de Newton :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(t=0) = y(t=0) = z(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_0 \\ \dot{y}(t=0) = \dot{z}(t=0) = 0 \end{cases}$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Selon Oz : $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = cte = \dot{z}(t=0) = 0$

$$\Rightarrow z = cte = z(t=0) = 0$$

Le mouvement de la particule se fait dans un plan perpendiculaire au champ magnétique

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Dans le plan *(Oxy)* du mouvement :

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} \quad (1) \qquad\qquad \ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} \quad (2)$$

Soit $u = x + iy$ et l'équation (3)=(1)+ i(2)

$$\ddot{u} = \frac{qB}{m}(\dot{y} - i\dot{x}) = -i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) = -i\frac{qB}{m}\dot{u} \quad (3)$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Résolution de

$$\ddot{u} + i\frac{qB}{m}\dot{u} = 0 \ (3)$$

avec $\dot{u}(t=0) = \dot{x}(t=0) + i\dot{y}(t=0) = v_0$

$$\Rightarrow \quad \dot{u}(t) = v_0 \exp\left[-i\frac{qB}{m}t\right]$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- En utilisant $u(t=0)=x(t=0)+iy(t=0)=0$

On obtient $$u(t)=i\frac{mv_0}{qB}\left(\exp\left[-i\frac{qB}{m}t\right]-1\right)$$

soit $$u(t)=i\frac{mv_0}{qB}\left(\cos\left[\frac{qB}{m}t\right]-1-i\,\sin\left[\frac{qB}{m}t\right]\right)$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Sachant que

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{u(t)\right\} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \mathrm{Im}\left\{u(t)\right\}$$

on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{mv_0}{qB}\sin\left[\dfrac{qB}{m}t\right] \\[2ex] y(t) = \dfrac{mv_0}{qB}\left(\cos\left[\dfrac{qB}{m}t\right] - 1\right) \end{cases}$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- On constate que $$x^2 + \left(y + \frac{mv_0}{qB} \right)^2 = \left(\frac{mv_0}{qB} \right)^2$$

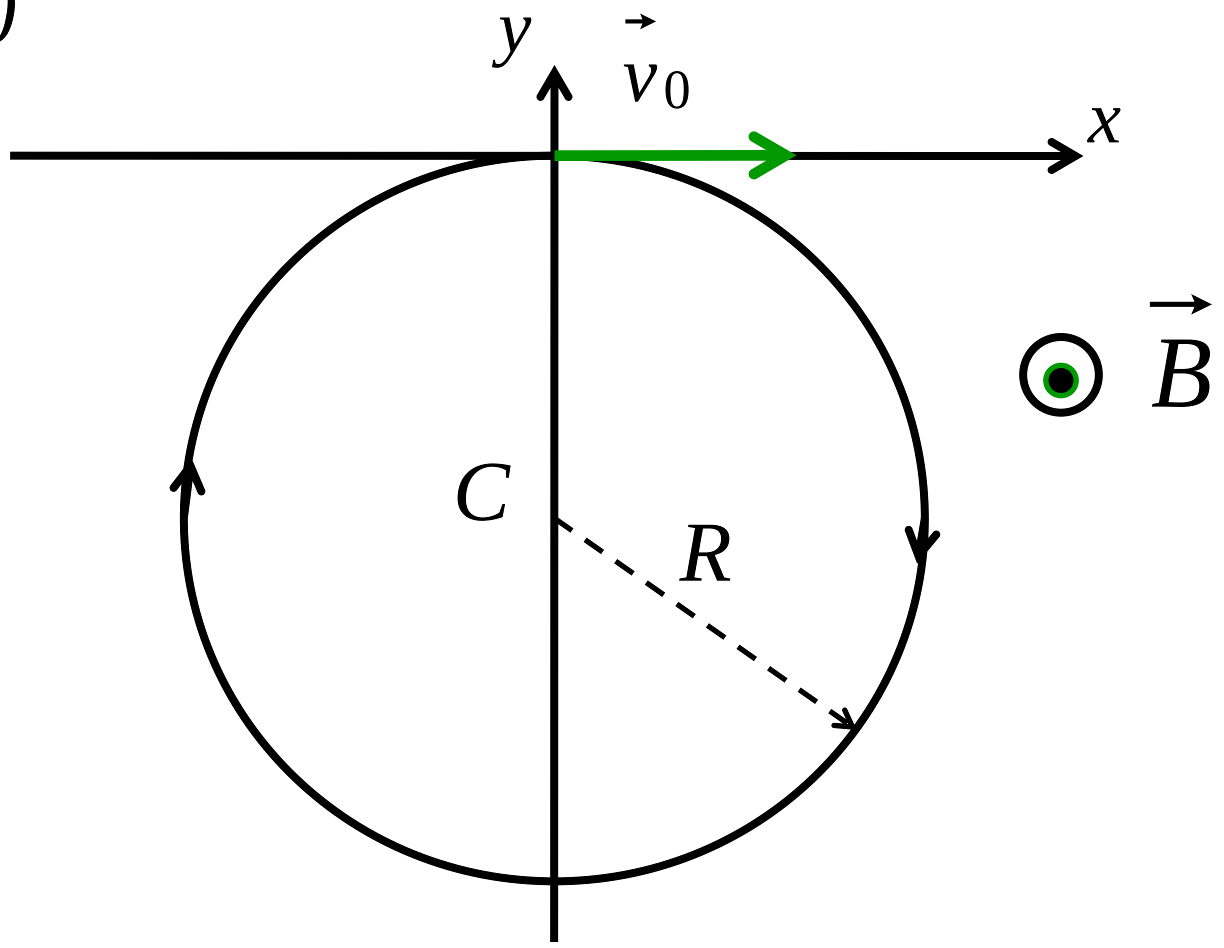
⇨ Trajectoire circulaire

de centre C : $$\boxed{X_c = 0 \quad Y_c = \frac{-mv_0}{qB}}$$

de rayon : $$\boxed{R = \frac{mv_0}{|q|B}}$$

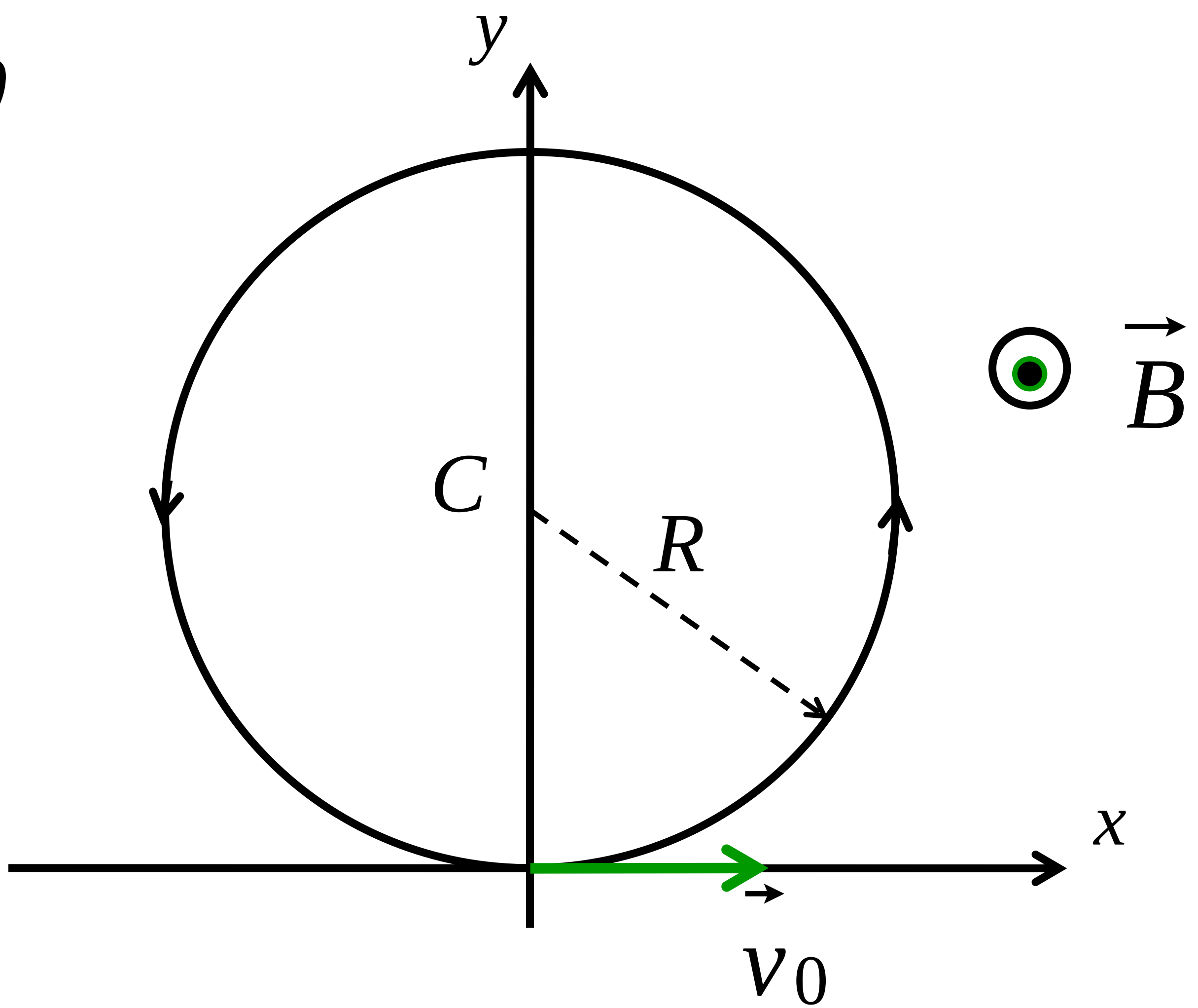
Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Si $q>0$



Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Si $q<0$



Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Dans les deux cas la trajectoire est parcourue avec la pulsation

$$\boxed{\omega_c = \frac{|q|B}{m}}$$

appelée pulsation cyclotron

- Cette pulsation ω_c et la période correspondante

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}}$$

sont indépendantes de la vitesse de la particule

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- Cas général :

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0\perp} + \vec{v}_{0//}$$

avec $$\vec{v}_{0//} = \left(\vec{v}_0 \bullet \vec{B}\right)\vec{B}/B^2 = (\vec{v}_0 \bullet \vec{e}_z)\vec{e}_z$$

et $$\vec{v}_{0\perp} = \vec{v}_0 - \vec{v}_{0//}$$

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- On utilise

  - O position initiale de la particule
  - Oz selon $\overrightarrow{B}$: $\overrightarrow{B} = B\,\vec{e}_z$
  - Ox selon $\vec{v}_{0\perp}$: $\vec{v}_{0\perp} = v_{0\perp}\vec{e}_x$
  - Oy tel que *(Oxyz)* orthogonal direct

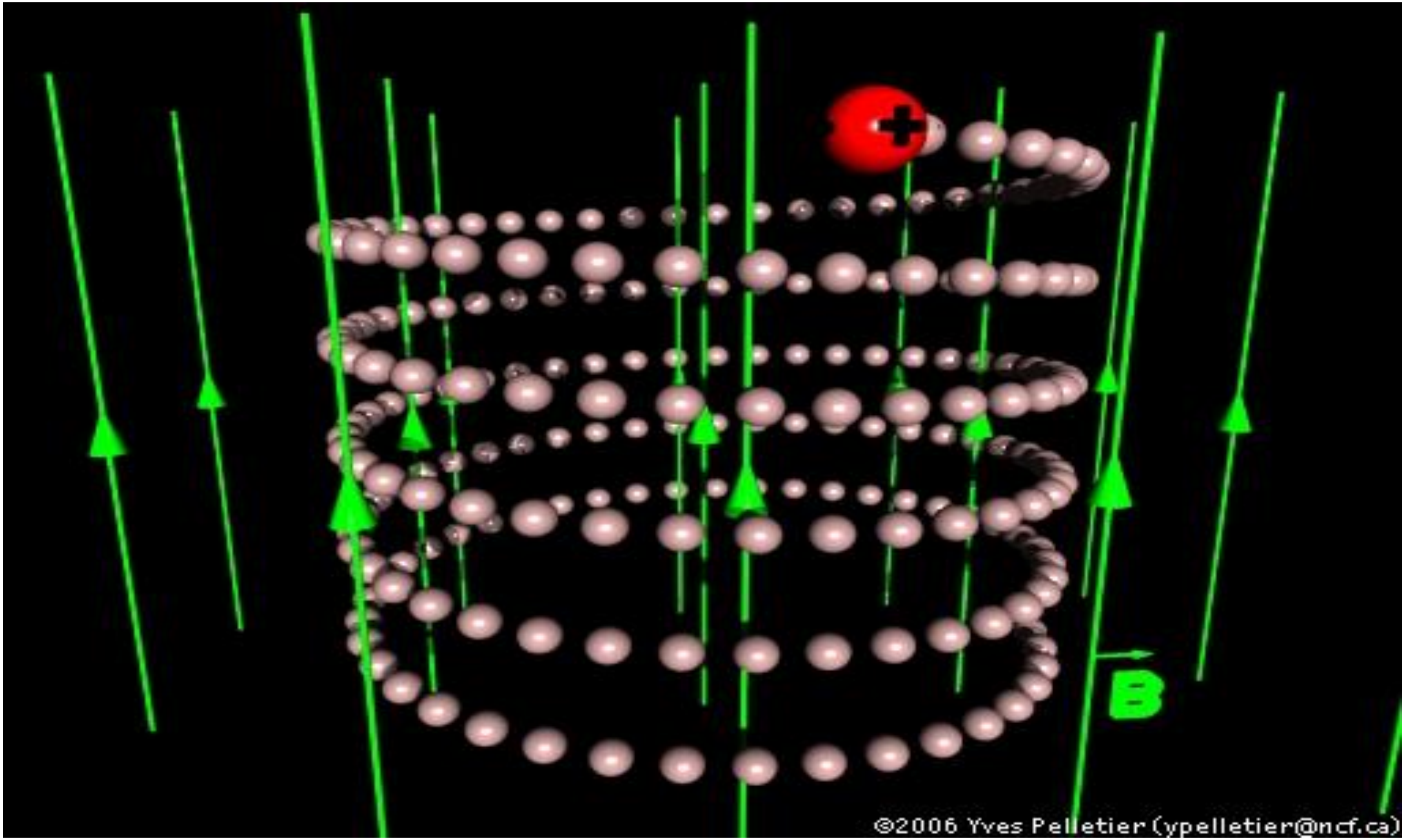
Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent

- On obtient

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = \dfrac{mv_{0\perp}}{qB}\sin\left[\dfrac{qB}{m}t\right] \\ y(t) = \dfrac{mv_{0\perp}}{qB}\left(\cos\left[\dfrac{qB}{m}t\right]-1\right) \\ z(t) = v_{0//}t \end{cases}}$$

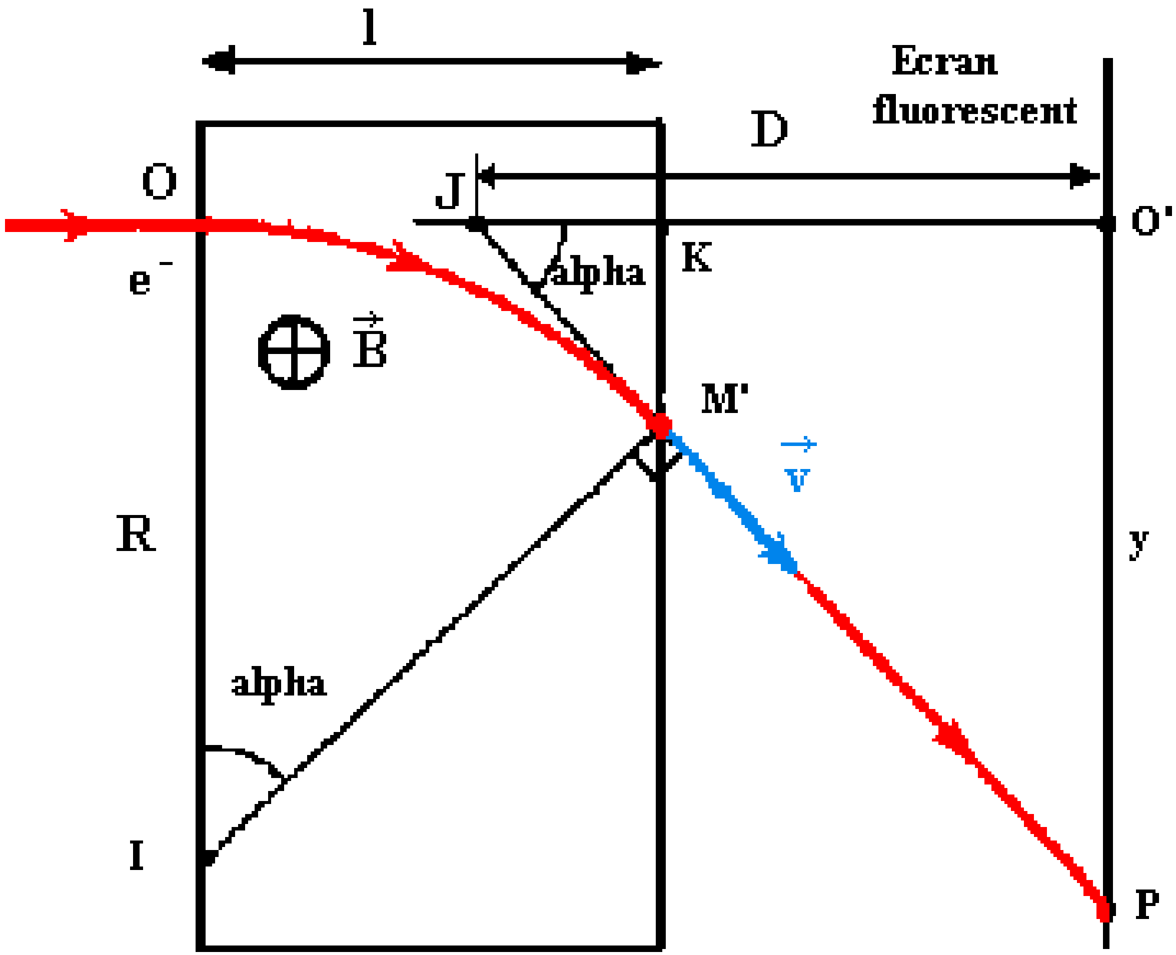
⇨ Mouvement hélicoïdal

Mouvement d'une particule dans un champ magnétique uniforme et permanent



Mouvement dans un champ magnétique

Application : Déflexion magnétique

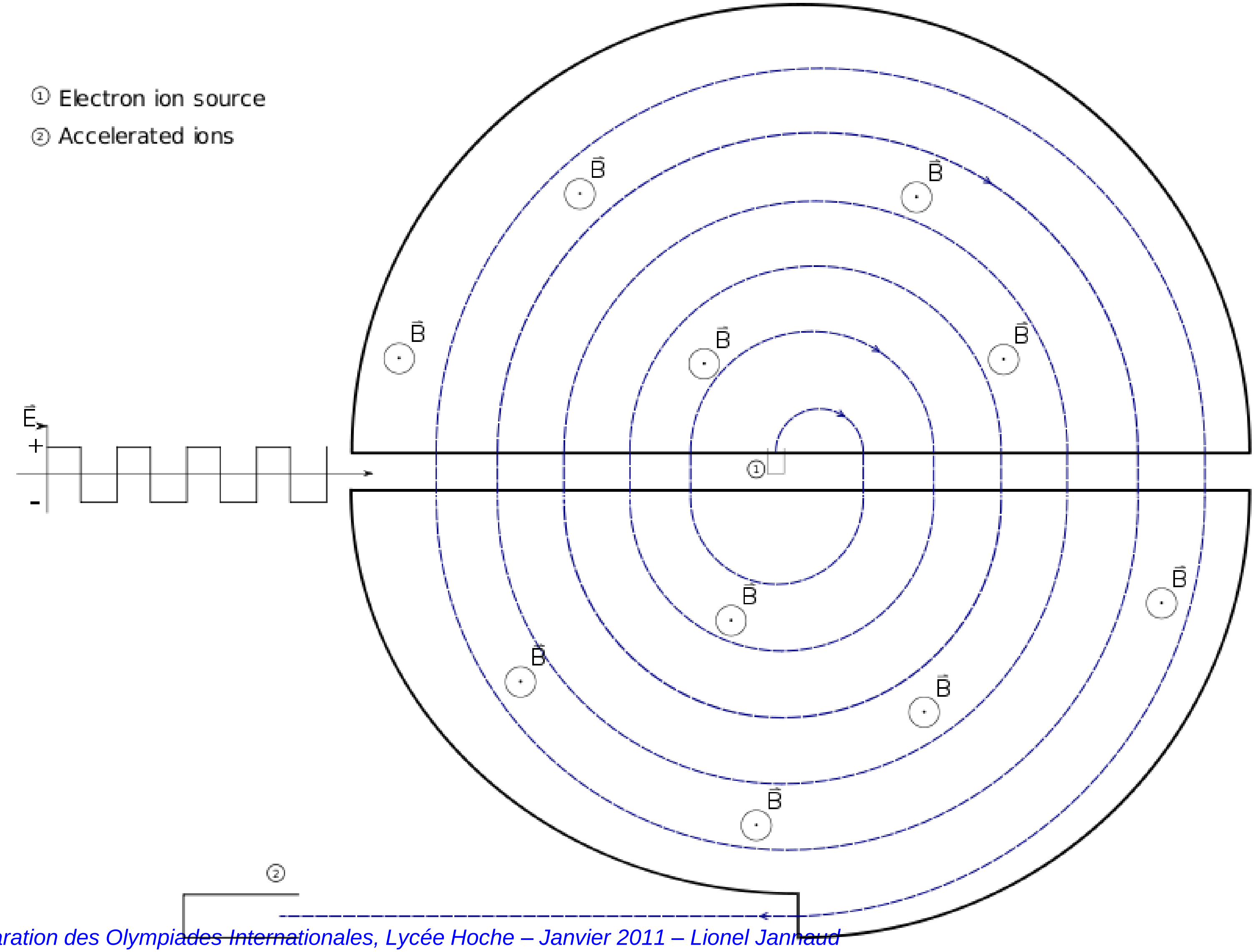


- $\tan\alpha = y/D$
- $l \approx R\alpha$ si $l \ll R$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{DelB}{mv_0}}$$

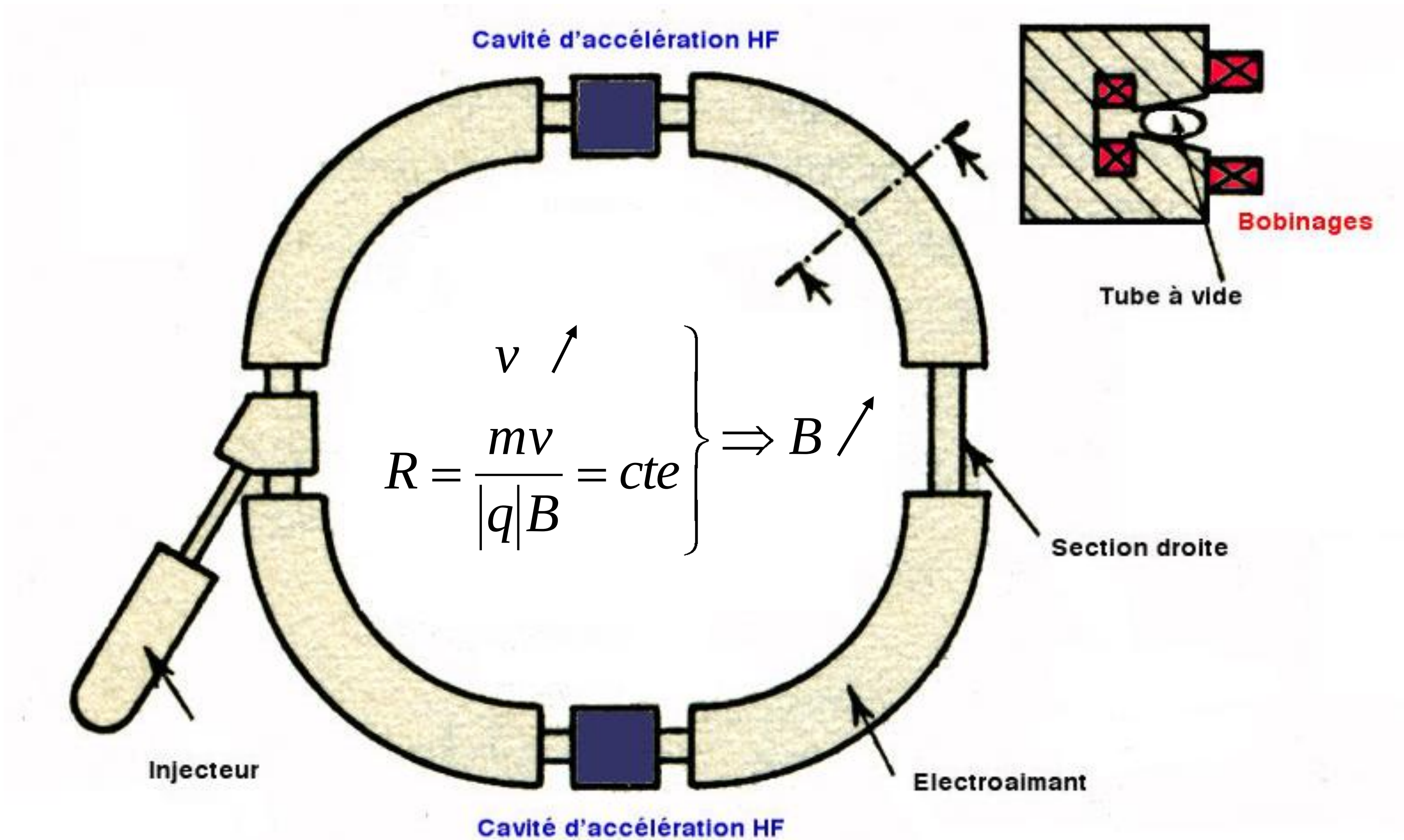
Mouvement dans un champ magnétique

Application : Cyclotron



Mouvement dans un champ magnétique

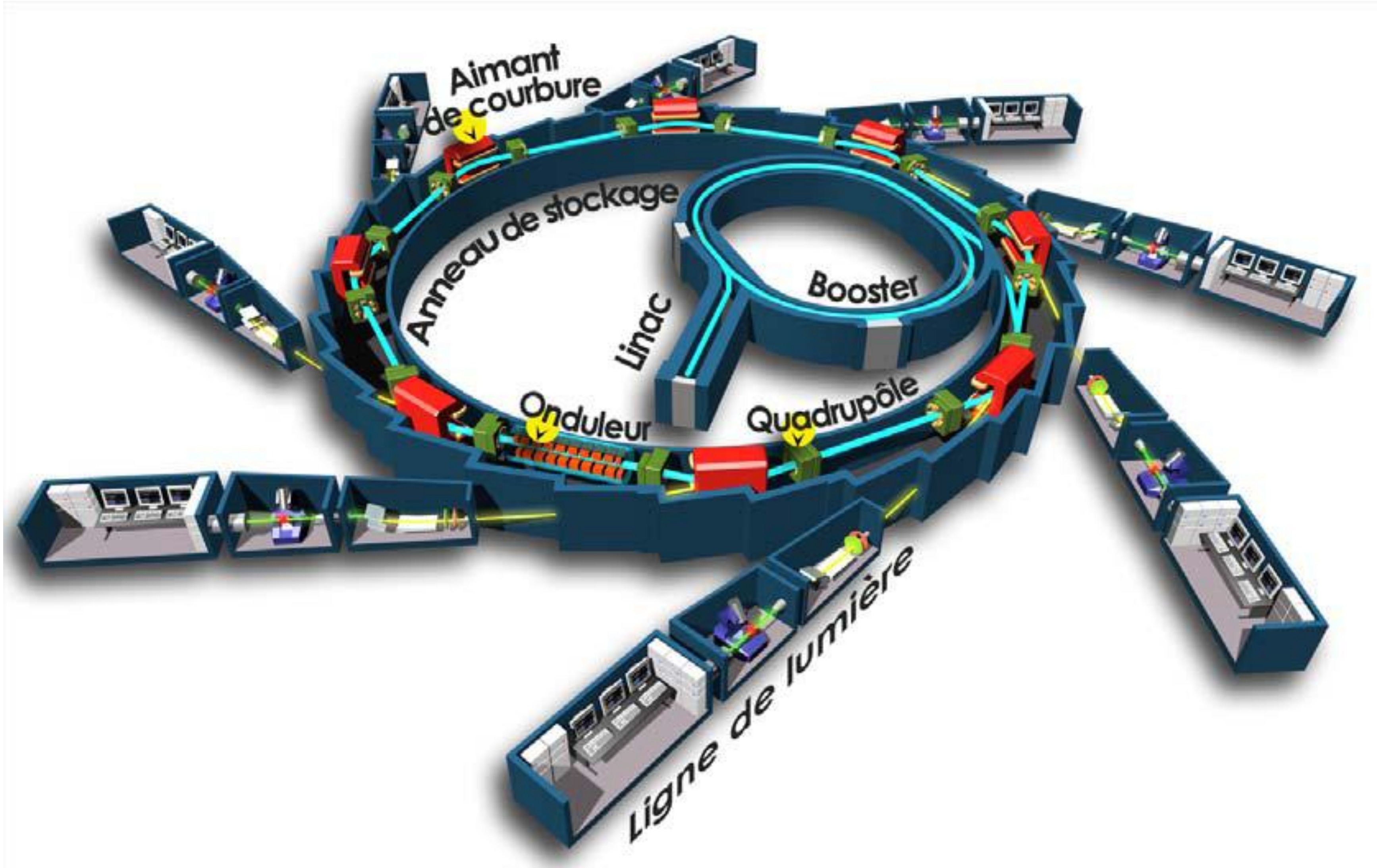
Application : Synchrotron



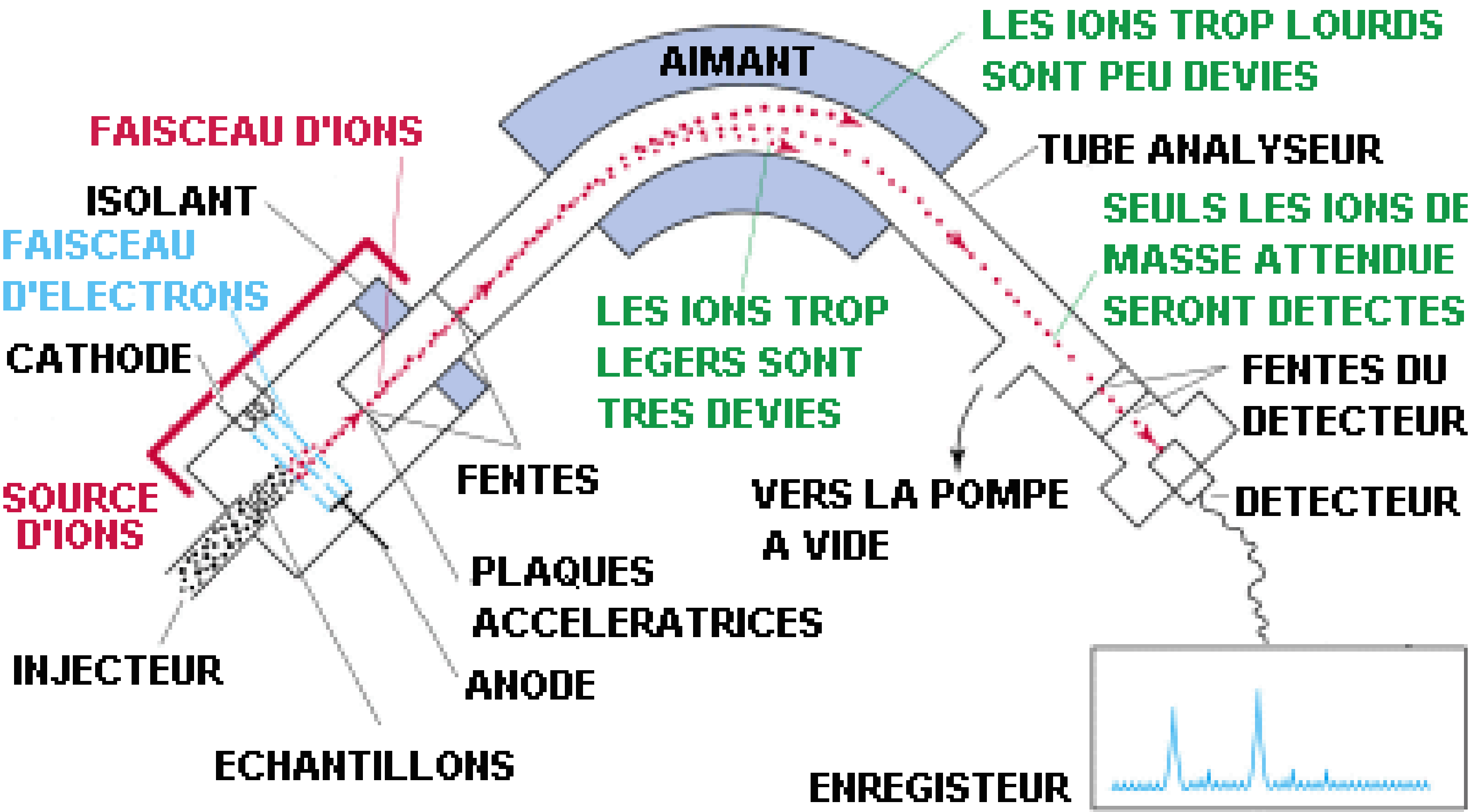
$$\left.\begin{array}{l} v \nearrow \\ R = \dfrac{mv}{|q|B} = cte \end{array}\right\} \Rightarrow B \nearrow$$

Mouvement dans un champ magnétique

http://www.synchrotron-soleil.fr

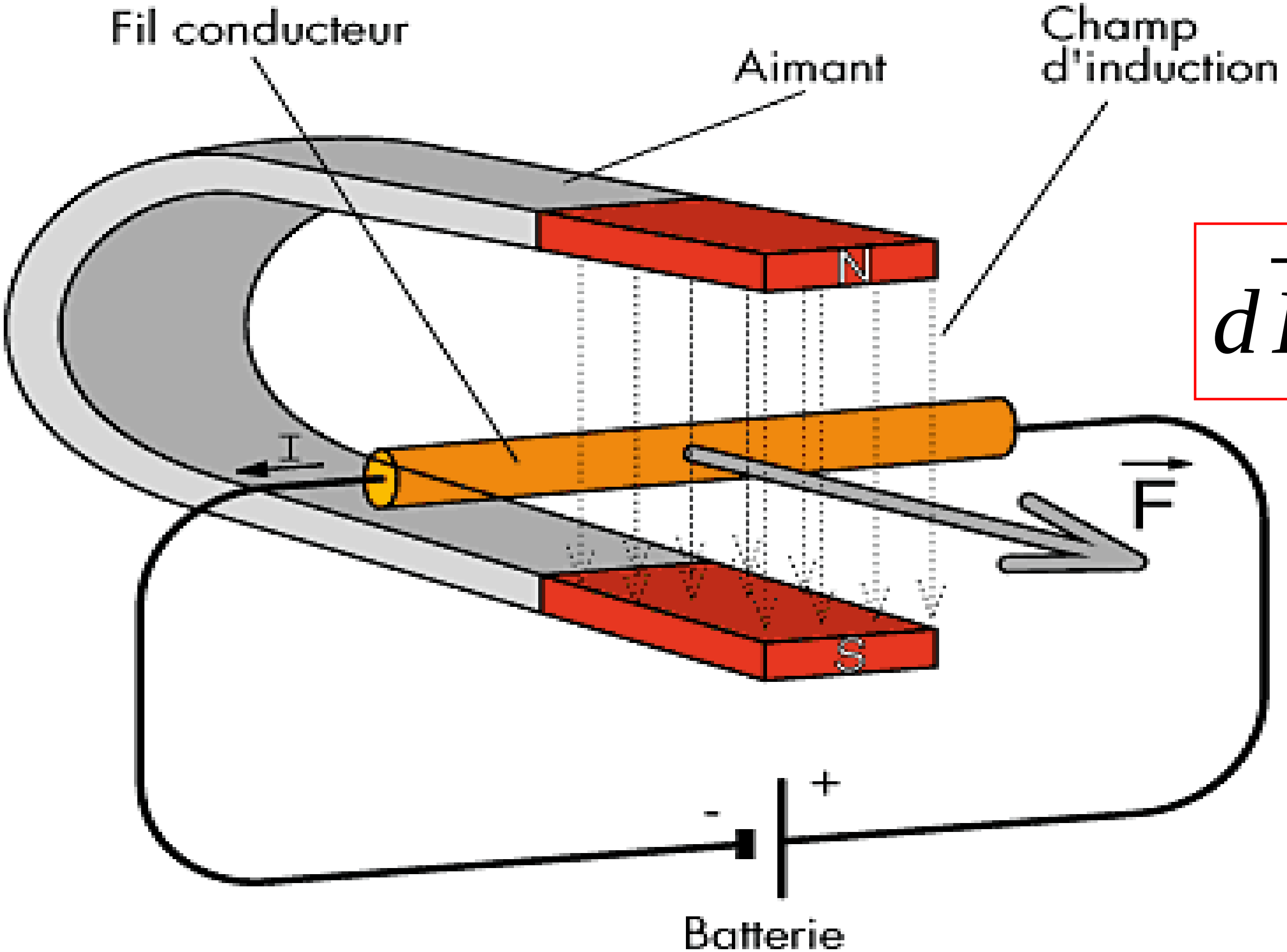


Mouvement dans un champ magnétique
Application : Spectrographe de masse



Mouvement dans un champ magnétique

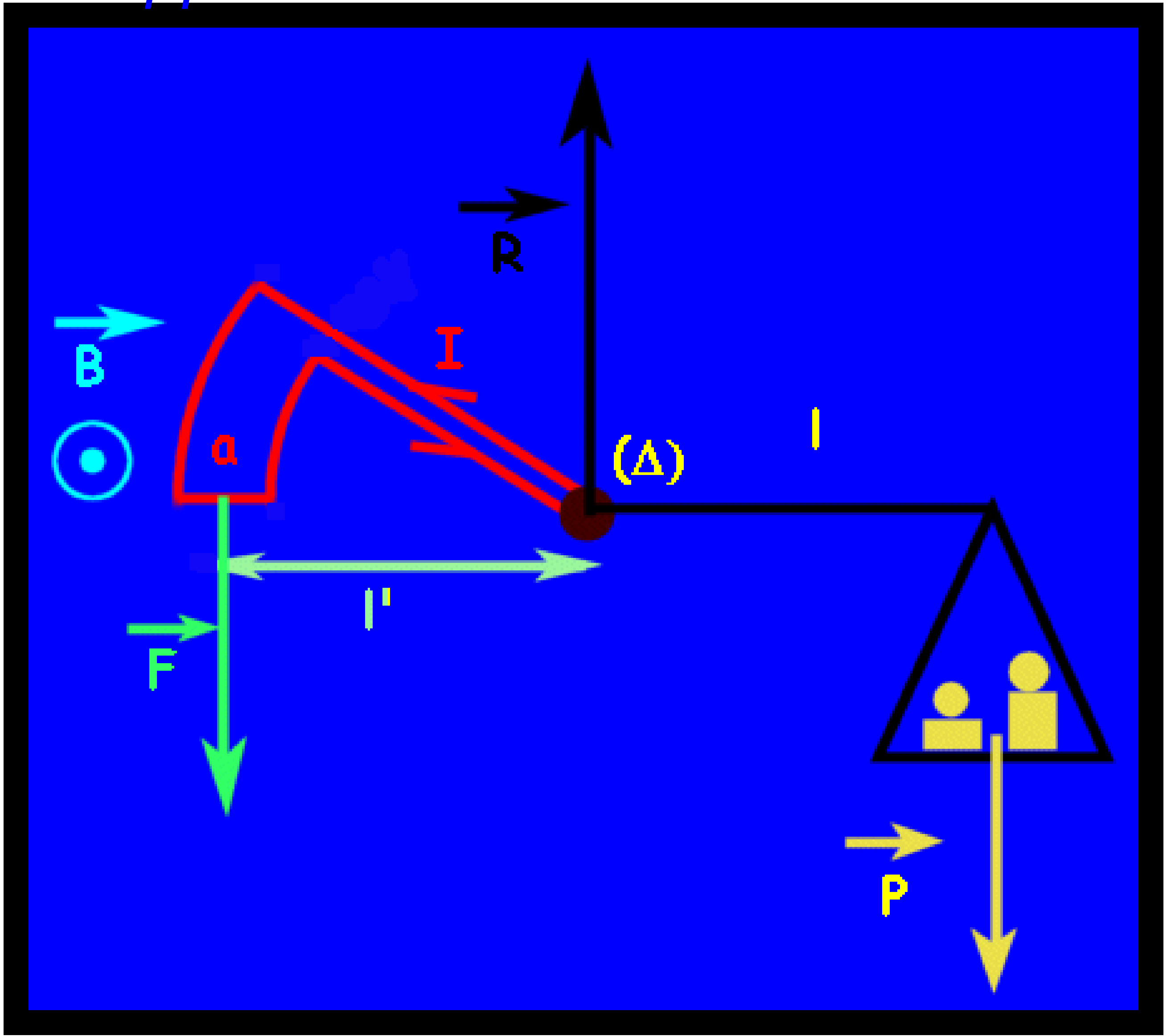
Application : Force de Laplace



$$\boxed{d\vec{F} = I d\vec{l} \wedge \vec{B}}$$

Mouvement dans un champ magnétique

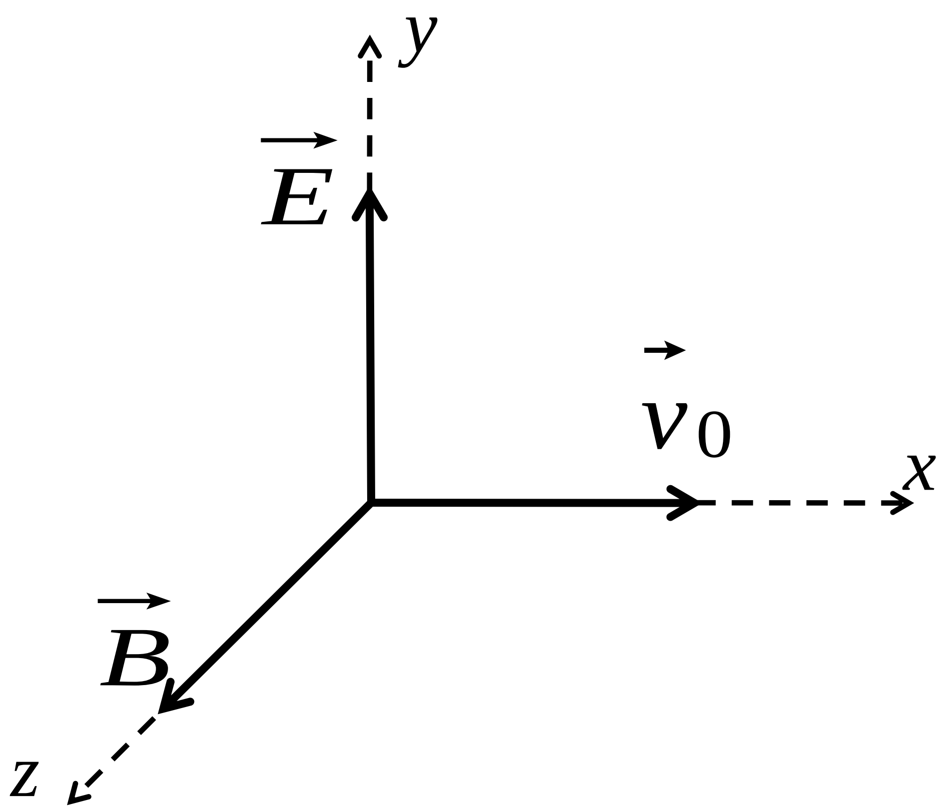
Application : Balance de Cotton



$$mgl = BIal'$$

$$\boxed{B = \frac{mgl}{Ial'}}$$

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes, permanents et perpendiculaires



- $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$
- $\vec{E} = E\vec{e}_y$
- $\vec{B} = B\vec{e}_z$

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,
Mise en équation

- Deuxième loi de Newton

$$m\vec{a}\left|\begin{matrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{matrix}\right. = q\vec{E}\left|\begin{matrix}0\\ E\\ 0\end{matrix}\right. + q\vec{v}\left|\begin{matrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{matrix}\right. \wedge \vec{B}\left|\begin{matrix}0\\ 0\\ B\end{matrix}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\begin{matrix}\dot{y}B\\ -\dot{x}B\\ 0\end{matrix}\right.$$

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,
Equations du mouvement

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} \\[2ex] \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x} + \dfrac{qE}{m} \\[2ex] \ddot{z} = 0 \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow z = 0 \quad \forall t > 0 \end{cases}$$

⇨ Mouvement plan

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes, *Equations du mouvement*

- Détermination de $x(t)$ et $y(t)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} \quad (1) \\ \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x} + \dfrac{qE}{m} \quad (2) \end{cases}$$

avec $u=x+iy$ vérifiant l'équation (1)+i(2)

ou…

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes, *Equations du mouvement*

- Détermination de $x(t)$ et $y(t)$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{qB}{m}\dot{y} & \Rightarrow \ \dot{x} = \dfrac{qB}{m}y + v_0 \ \text{ puisque } \begin{cases} \dot{x}(t=0) = v_0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \\ \ddot{y} = -\dfrac{qB}{m}\dot{x} + \dfrac{qE}{m} & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = \frac{qB}{m}\left(\frac{E}{B} - v_0\right)$$

avec $y(t=0) = 0$ et $\dot{y}(t=0) = 0$

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,

Equations du mouvement

$$\boxed{y(t) = \frac{m}{qB}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)(\cos \omega_c t - 1)}$$

donc $$\dot{x} = \frac{qB}{m} y + v_0 = \left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\cos \omega_c t + \frac{E}{B}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{\omega_c}\left(v_0 - \frac{E}{B}\right)\sin \omega_c t + \frac{E}{B} t}$$

puisque $x(t=0) = 0$

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,
Cas particuliers

- Si $v_0 = 0$

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{v_D}{\omega_c}\left(\omega_c t - \sin \omega_c t\right) \\ y(t) = \dfrac{v_D}{\omega_c}(1 - \cos \omega_c t) \end{cases}$$

où $v_D = E/B$ est la vitesse de dérive

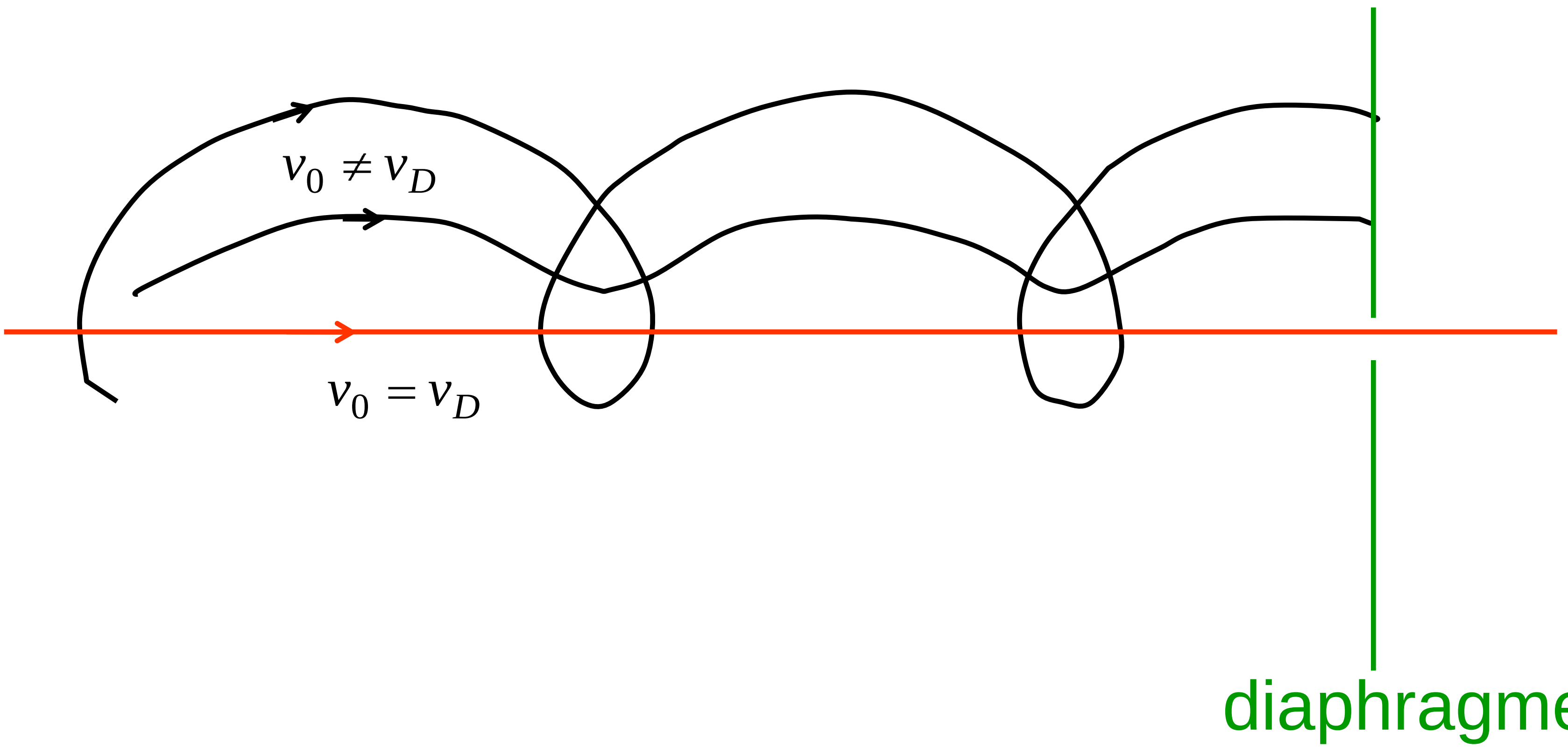
Cycloïde

- Si $v_0 = v_D$,

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad \forall t > 0$$

Mouvement rectiligne et uniforme

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,
Filtre de vitesse



Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,
Effet Hall

Champ magnétostatique $\vec{B}$ $\Rightarrow$ Déplacement des charges positives et négatives sur les faces 1 et 2

$\Downarrow$

Création d'un champ électrique $\overrightarrow{E_H}$ de la face 1 vers la face 2

$\Downarrow$

Mouvement des charges selon Ox

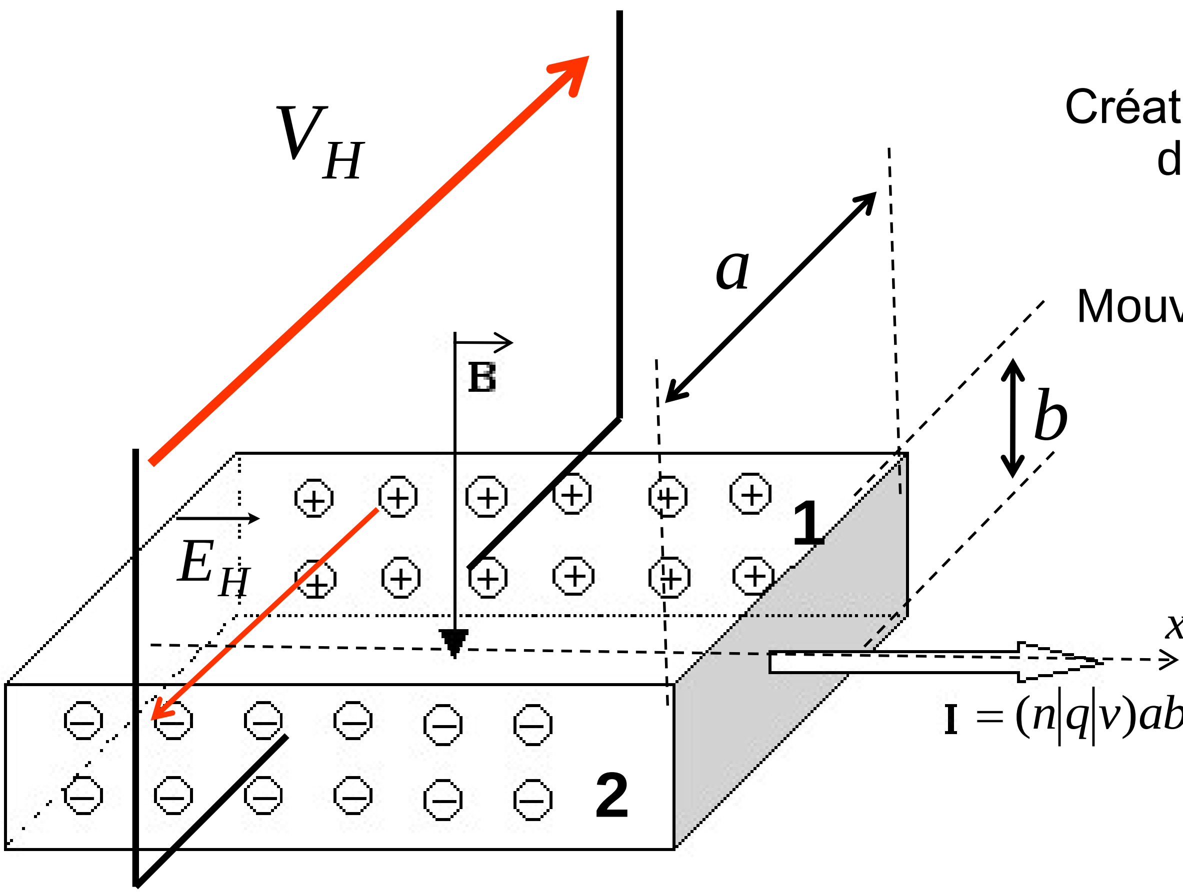
$$\vec{F} = q(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$$E_H = vB = \frac{IB}{n|q|ab}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{V_H = aE_H = \frac{IB}{n|q|b}}$$



Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes, *Sonde à effet Hall pour mesurer des champs magnétiques*

- L'intensité I est imposée par le circuit d'alimentation.
- Le nombre de porteur de charge n par unité de volume et la charge q de chaque de porteur dépendent du métal conducteur utilisé.
- b dépend de la géométrie du conducteur
- La mesure de la tension V_H (quelques micro volts) permet grâce à

$$V_H = \frac{IB}{n|q|b}$$

de déterminer le module B du champ magnétique

Mouvement dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes,
Cas relativiste

- Si la condition $v << c$ n'est plus vérifiée, la seconde loi de Newton s'écrit toujours

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

avec $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ et $\gamma = 1 \big/ \sqrt{1 - (v/c)^2}$

Les forces conservent les mêmes expressions

$$\vec{F} = q[\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}]$$

Mouvement dans $\vec{B}$ uniforme, *Cas relativiste*

- Résultats de la dynamique relativiste

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

avec $\vec{F} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \perp \vec{v}$

et $E = \gamma mc^2$ $\quad (E \approx mv^2/2 + mc^2$ si $\quad v \ll c)$

- $E = cte \Rightarrow \gamma = cte$ et $v = cte$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Mouvement dans $\vec{B}$ uniforme,
Cas relativiste

- Si $\vec{v}(t=0) \perp \vec{B}$, la trajectoire est circulaire :

$$R = \frac{\gamma m v}{|q|B} \qquad \omega_c = \frac{|q|B}{m\gamma}$$

- La période du mouvement dépend de *v* contrairement au cas du cyclotron dans le cas non relativiste

⇨ Désynchronisation progressive du mouvement hémicirculaire de la particule par rapport au champ électrique accélérateur.

Mouvement dans $\vec{E}$ uniforme,
Cas relativiste

- Particule (q,m) initialement au repos et soumise au champ électrique $\vec{E}$ uniforme et permanent.

- Mise en équation :

$$\left.\begin{array}{l} \vec{E} = E_x \vec{e}_x \\[2ex] x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0 \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\left(\dot{x}/c\right)^2}}\right] = qE_x \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\left(\dot{x}/c\right)^2}} = \frac{qE_x}{m} t$$

Mouvement dans $\vec{E}$ uniforme,
Cas relativiste

- On en déduit
$$\dot{x} = \frac{\frac{qE_x}{m}t}{\sqrt{1+\left(\frac{qE_x}{mc}\right)^2 t^2}}$$

- Si $t << mc/qE_x\,,\quad \dot{x} \approx \frac{qE_x}{m}t$ (mécanique classique)

- Si $t >> mc/qE_x\,,\quad \dot{x} \approx c$

⇨ Existence d'une vitesse limite

Mouvement dans $\vec{E}$ uniforme,
Cas relativiste

- On obtient

$$x(t)=\frac{mc^2}{qE_x}\left[\sqrt{1+\left(\frac{qE_x}{mc}\right)^2 t^2}-1\right]$$

- Si $t \ll mc/qE_x\,,\quad x(t)=\dfrac{qE_x}{2m}t^2$

en utilisant $(1+u)^{1/2}\approx 1+u/2\; si\; |u|\ll 1$

- Si $t \gg mc/qE_x\,,\; x(t)=ct$

Mouvement d’une particule chargée dans un champ électrique et/ou magnétique uniforme et permanent

- Création d'un champ électrique
- Création d'un champ magnétique
- Force de Lorentz
- Energie d'une particule
- Mvt dans $\vec{E}$
- Mvt dans $\vec{B}$
- Mvt dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ croisés
- Cas relativiste
  - Mvt dans $\vec{E}$
  - Mvt dans $\vec{B}$