Mathématiques, ECS1

Bienvenue en ECS1 au lycée Hoche !

Le rythme de travail sera soutenu dès les premiers jours, il ne faut donc pas attendre la rentrée pour vous remettre au travail. Il est toutefois inutile de "prendre de l'avance" sur le programme de l'année à venir. Mieux vaut faire des révisions sur les programmes de Première S et de Terminale S.

Par ailleurs, toutes les épreuves de mathématiques en ECS se déroulent dans les mêmes conditions : les épreuves durent quatre heures et la calculatrice y est interdite. Il est donc indispensable d'arriver dès la rentrée avec des bases de calcul solides.

Voici donc deux documents pour vous accompagner dans vos révisions. Bon été à tous et rendez-vous à la rentrée !

NB : Il n'est pas utile de rédiger vos réponses au propre pour la rentrée, ce travail personnel ne sera pas ramassé.

Entraînement au calcul

Voici une liste de calculs à effectuer sans calculatrice, avec pour seuls outils un crayon et une feuille de papier.

Certains calculs vous paraîtront certainement très simples. Je vous conseille néanmoins de tous les traiter, car l'objectif de cette feuille d'entraînement est triple :

- Travailler la rapidité, l'efficacité et le calcul mental sur les calculs faciles ;
- Acquérir des réflexes sur les calculs classiques ;
- Déjouer les pièges dans les calculs les plus difficiles.

Il faut réussir à mener ces calculs vite et bien !

Vous pourrez bien sûr vérifier vos calculs à la calculatrice, mais seulement après les avoir effectués à la main. Les réponses finales sont données à la fin de ce document.

Résolution d'inéquations :
Résoudre les inéquations suivantes :

- $\dfrac{1}{x} < 3$
- $2 < 1 + 2x^2 \leqslant 5$
- $\dfrac{1-2x}{x(x+1)} \leqslant 0.$
- $\dfrac{1}{x-1} \leqslant 2.$
- $|1-2x| > 3.$
- $|3x^2-1| \leqslant 2.$

Résolution de systèmes :

- Résoudre $\begin{cases} x - 3y = -1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$
- Résoudre $\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases}$, où a et b sont deux réels fixés.

Résolution d'équations :

- Résoudre $e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre $x + \sqrt{x^2} = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Résoudre $2x^4 - x^2 - 1 = 0$ pour $x \in \mathbb{C}$.

Représentations graphiques.

• Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions suivantes. On n'utilisera aucun tableau de valeurs. On tracera la courbe en tenant compte de ses particularités (sens de variation, intersections avec les axes, valeurs remarquables, tangentes, limites, asymptotes...)

$x \mapsto \exp(x)+1$	$x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \sin(2x)$
$x \mapsto \exp(-x)$	$x \mapsto (x+1)^3$	$x \mapsto \sqrt{x-1}$	$x \mapsto x(x+2)$

Calculs de dérivées et de primitives :

• Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Calculer une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1,+\infty[$.

• Trouver deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\} \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$ et en déduire une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x(x+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

• Calculer une primitive de $f : x \mapsto \cos(4x)$ sur $\mathbb{R}$.

• Calculer une primitive de $f : x \mapsto x(x-3)$ sur $\mathbb{R}$.

• Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x-2)^2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

• Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Simplifications :

• Lorsque les fractions sont simplifiables, les écrire sous forme de fractions irréductibles :

$\dfrac{123}{312} \qquad \dfrac{89}{29} \qquad \dfrac{35}{91} \qquad \dfrac{37}{122}$

• Trouver deux nombres relatifs a et b tels que $\dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = a\sqrt{2}+b\sqrt{5}$.

• Simplifier les expressions suivantes :

$\sqrt{(x-1)^2}$, lorsque $x \leqslant 1$. $\qquad \ln(\sqrt{x})$ lorsque $x > 0$. $\qquad \dfrac{\sin(n\pi)-\sin(\pi/6)}{2-\cos(\pi/3)}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{(1-2x)^4}$, lorsque $x \in \mathbb{R}$. $\qquad (\sqrt{2})^{4n}$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

• Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Simplifier les ensembles suivants :

$I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n$ où $I_k = \left[1, 1+\dfrac{1}{k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

$I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n$ où $I_k = \left[1, 1+\dfrac{1}{k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

$J_1 \cap J_2 \cap ... \cap J_n$ où $J_k = \left[-k, \dfrac{1}{2k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

$J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_n$ où $J_k = \left[-k, \dfrac{1}{2k}\right[$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

Calculs de limites

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

• $\lim\limits_{n\to+\infty} (e-1)^n$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2)e^{-n}$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$

• $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x}$

• $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$.

Calculs sur les nombres complexes :

• Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

$\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$ $\qquad$ $\dfrac{1+2i}{3+4i}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2+e^{i\theta}}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

• Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

$\dfrac{1}{2i}$ $\qquad$ $(1+i)^{2020}$.

Factorisations et développements :

• Factoriser $2x^2 - x - 1$.

• Factoriser $x^3 + 2x^2 + x$.

• Développer $(x-2)^3$.

Réponses :

Résolution d'inéquations :

• $x \in]-\infty, 0[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

• $x \in]-1, 0[\cup [\frac{1}{2}, +\infty[$

• $x \in]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$

• $x \in [-1, 1]$.

• $x \in [-\sqrt{2}, \frac{-1}{\sqrt{2}}[\cup]\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$

• $x \in]-\infty, 1[\cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

Résolution de systèmes :

• $x = 2, y = 1$

• $x = \dfrac{a+b}{2}, y = \dfrac{a-b}{2}$

Résolution d'équations :

• $x = \ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ ou $x = \ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

• $x \in \mathbb{R}_-$.

• $x = 1$ ou $x = -1$ ou $x = \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ ou $x = \dfrac{-i}{\sqrt{2}}$.

Calculs de dérivées et de primitives :

• $F : x \mapsto \dfrac{-1}{(x-2)}$.

• $F : x \mapsto \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{3}}$

• $F : x \mapsto \ln(\ln(x))$

• $a = 1, b = -1$; $F : x \mapsto \ln(x) - \ln(x+1)$.

• $F : x \mapsto \dfrac{1}{4}\sin(4x)$

• $F : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2}$

• $f' : x \mapsto \dfrac{-2}{(x-2)^3}$

• $f' : x \mapsto \dfrac{e^{x^2}(2x^2-2x-1)}{(x-1)^2}$

Simplifications :

• $\dfrac{123}{312} = \dfrac{41}{104}$, $\qquad$ $\dfrac{35}{91} = \dfrac{5}{13}$, $\qquad$ $\dfrac{89}{29}$ et $\dfrac{37}{122}$ sont irréductibles.

• $a = b = -1$.

• $\sqrt{(x-1)^2} = 1 - x$, lorsque $x \leqslant 1$.

$\sqrt{(1-2x)^4} = (1-2x)^2$, lorsque $x \in \mathbb{R}$.

$\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln(x)$ lorsque $x > 0$.

$(\sqrt{2})^{4n} = 4^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

$\dfrac{\sin(n\pi) - \sin(\pi/6)}{2 - \cos(\pi/3)} = \dfrac{-1}{3}$.

- $I_1 \cap I_2 \cap ... \cap I_n = \left[1, 1 + \dfrac{1}{n}\right[$ et $I_1 \cup I_2 \cup ... \cup I_n = [1, 2[$.

$J_1 \cap J_2 \cap ... \cap J_n = \left[-1, \dfrac{1}{2n}\right[$ et $J_1 \cup J_2 \cup ... \cup J_n = \left[-n, \dfrac{1}{2}\right[$.

Calculs de limites

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (e-1)^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-\sqrt{2})^n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-n^2)e^{-n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{2x} = \dfrac{1}{2}$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3$.

Calculs sur les nombres complexes :

- $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = i$ $\qquad \dfrac{1+2i}{3+4i} = \dfrac{11}{25} + \dfrac{2i}{25}$ $\qquad \dfrac{1}{2+e^{i\theta}} = \dfrac{2+\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)} + \dfrac{-\sin(\theta)}{5+4\cos(\theta)}i$.
- $\dfrac{1}{2i} = \dfrac{1}{2}e^{-i\pi/2}$ $\qquad (1+i)^{2020} = 2^{1010}e^{i\pi}$.

Factorisations et développements :

- $2x^2 - x - 1 = 2(x + \dfrac{1}{2})(x-1)$
- $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$
- $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Exercices de révision

Ces exercices sont extraits de livres de 1ère S et de Tle S. Ils sont donc entièrement faisables à partir de vos connaissances actuelles. Certains sont faciles, d'autres demandent davantage de réflexion. Traitez ces exercices sans l'aide de la calculatrice, sauf lorsque son utilisation est mentionnée. Bon travail !

DERIVEES ET INTEGRALES

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$.

Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{2(x^2+2)}{\sqrt{x^2+4}}$.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+x}{x+1}$.

1. Montrer que pour tout $x > -1$: $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$.
2. Calculer l'intégrale de f entre 0 et 1.

Exercice 3.

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 e^{2x-1}dx,\ J = \int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx,\ K = \int_0^\pi \sin(x)\cos(x)dx,\ L = \int_0^1 \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}}dx, M = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx.$$

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}dx$ et $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^n+1}dx$.

1. a. Justifier que pour tout x de $[0,1]$, $\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1$.
b. Montrer que la suite (I_n) est majorée par 1.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.
b. En déduire la limite de la suite (J_n).
3. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, $I_n + J_n$.
4. Déterminer la limite de la suite (I_n).

ETUDES DE FONCTIONS.

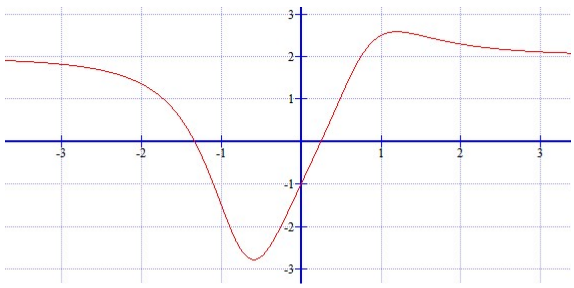
Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $]5,+\infty[$ par $f(x) = x + \ln\left(\frac{x-5}{2x-1}\right)$.
1. Déterminer les limites de f en 5 et en $+\infty$.
2. Pour tout $x > 5$, calculer $f'(x)$ et étudier son signe (utiliser la calcultrice pour le calcul du discriminant).
3. En déduire le tableau de variation de f.

Problème de synthèse 1.

Partie A : Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^4 + 3x^3 + 1$.
1. Déterminer les limites de la fonction g en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Etudier les variations de la fonction g.
3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ a exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la calculatrice pour la valeur de $g(\frac{3}{4})$). On notera ces solutions a et b pour la suite du problème.
4. Déterminer le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2 + \frac{4x-3}{x^4+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.



1. a. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote $\mathcal{D}$ parallèle à l'axe des abscisses.
b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

2. a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{4g(x)}{(x^4+1)^2}$, g étant la fonction définie dans la partie A.
b. Etudier les variations de la fonction f.
3. Soit h une fonction telle que pour tout réel x de l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$, $2 \leqslant h(x) \leqslant f(x)$. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.

Problème de synthèse 2.

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}dt$.
1. a. Calculer $f(1)$.
b. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.
c. Etudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.

2. a. Etablir que pour tout nombre réel $x \geqslant 1, f(x) \geqslant e\ln(x)$.
b. En déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3. a. Etablir que, pour tout $x \in]0,1], f(x) \leqslant e\ln(x)$.
b. En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et e cm sur l'axe des ordonnées.
a. On note f'' la dérivée seconde de f. Pour tout $x > 0$, calculer $f''(x)$.
b. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet un point A en lequel la dérivée seconde s'annule et change de signe.
c. Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point A.
d. Tracer la tangente T et l'allure de $\mathcal{C}$.

6. a. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique réel noté u_n vérifiant $\displaystyle\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} dt = n$.
b. En utilisant les variations de f, montrer que la suite (u_n) est croissante.
c. Démontrer grâce à un raisonnement par l'absurde que la suite (u_n) n'est pas majorée.
d. En déduire la limite de (u_n).

ETUDES DE SUITES.

Exercice 1.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $v_n = n(n+1)$.

Exercice 2.

On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{9}{6 - v_n}$.
1. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n, 0 < v_n < 3$.
b. Démontrer que pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

2. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.
a. Démontrer que la suite (w_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
b. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.
c. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 3.

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = 7 - \dfrac{2}{x+3}$.
1. Démontrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0, +\infty[$. On notera α la solution. On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près à l'aide de la calculatrice.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
a. Tracer la courbe de f et la droite d'équation $y = x$.
b. Placer les points M_0, M_1, M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2.
c. Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de (u_n) ?

4. a. Démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, où α est le réel défini à la question 2.
b. Peut-on affirmer que (u_n) est convergente ? Justifier.

NOMBRES COMPLEXES, TRIGONOMETRIE

Exercice 1.

1. Déterminer la forme algébrique et une forme trigonométrique de $Z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{7\pi}{12}$.

Exercice 2.

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$ l'équation : $2\cos^2(x) - 1 = 0$.

Exercice 3.

Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problème de synthèse.

La fonction tangente est la fonction définie pour tout réel x différent de $\frac{\pi}{2}+k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

On va étudier cette fonction, que l'on note f, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$, pour tout x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

3. Exprimer $f'(x)$ en fonction de x, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

4. Construire le tableau de variation de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

5. a. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

b. Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T. On pourra pour cela étudier les variations puis le signe de la fonction $g : x \mapsto \sin(x) - x\cos(x)$.

6. Tracer T et $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

PROBABILITES CONDITIONNELLES

Exercice 1.

A et B sont deux événements. On a $P(A) = \frac{1}{4}, P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ et $P(B) = a$.

1. Calculer a dans chacun des cas suivants :

a. A et B sont incompatibles ;

b. A et B sont indépendants ;

c. A est une partie de B.

2. Dans chacun de ces cas, calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 2.

Dans un magasin, il y a deux sortes de cadenas.

Les uns sont des cadenas premier prix, les autres sont haut de gamme.

- 80% des cadenas proposés à la vente sont premier prix, les autres sont haut de gamme.
- 3% des cadenas haut de gamme sont défectueux.
- 7% des cadenas sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- p la probabilité qu'un cadenas premier prix soit défectueux.
- H l'événement "le cadenas prélevé est haut de gamme".
- D l'événement "le cadenas prélevé est défectueux".

1. Exprimer la probabilité $P(D)$ en fonction de p. En déduire la valeur du réel p.

2. Le cadenas prélevé est défectueux. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme.

Exercice 3.

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,1 ;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,8 ;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,6.

On note, pour tout entier naturel n non nul :
- G_n l'événement "le joueur gagne la n-ème partie" ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n. On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
5. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.

VARIABLES ALEATOIRES

Exercice 1.

Une urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires.
1. On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité p pour que la boule soit rouge ?
2. On tire trois fois de suite avec remise une boule de l'urne.
On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges.
a. Quelle loi suit X ?
b. Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.

Exercice 2.

Un enfant, qui ne connaît pas les chiffres, compose au hasard sur un téléphone un numéro à n chiffres, où n est supérieur ou égal à 3. Les dix chiffres de 0 à 9 ont la même probabilité d'être choisis par l'enfant.
1. Soit X_n la variable aléatoire qui, à chaque numéro de n chiffres composé par l'enfant, associe le nombre d'apparitions du 0 dans le numéro.
a. Quelle loi suit X_n ?
b. Déterminer, en fonction de n, l'espérance mathématique et la variance de X_n.
2. Soit F_n la variable aléatoire définie par : $F_n = \frac{1}{n}X_n$.
a. Calculer l'espérance mathématique et la variance de F_n.
b. Que représente F_n ?

Exercice 3.

On lance une pièce de monnaie truquée de telle manière que la probabilité de sortie de la face "Pile" est $\frac{1}{3}$.
Le joueur gagne 9 € si la face visible est "Pile" et il perd 3 € sinon.
On note G la variable aléatoire qui, à chaque lancer, associe le gain du joueur (positif ou négatif).
1. Etablir la loi de probabilité de G.
2. Calculer l'espérance mathématique de G, sa variance et son écart-type.

Exercice 4.

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher, numérotées respectivement 1, 2 et 3. Le jeu proposé est le suivant : on verse d'abord 10 €, puis on effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise.
On obtient ainsi un nombre à trois chiffres en notant dans l'ordre les trois numéros obtenus.
- Si les trois chiffres sont identiques, on reçoit 25 € ;
- s'ils sont tous différents, on reçoit 15 € ;
- dans tous les autres cas, on ne reçoit rien.

1. Donner le nombre de tirages distincts possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le gain du joueur (positif ou négatif).
Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X.
3. Présenter dans un tableau la loi de probabilité de la variable aléatoire X.